I	1. 집합의 포함관계와 부분집합의 수	집합과 명제

1. $\emptyset \subset A$, $A \subset A$
2. $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
3. $A \subset B$, $B \subset A \Rightarrow A = B$
4. $A \subset B$, $B \neq A \Rightarrow A$ 는 B의 진부분집합
5. $n(A) = m$ 일 때, 집합 A의
   1) 부분집합 수 $\Rightarrow$ 2^m
   2) 진부분집합의 수 $\Rightarrow$ $2^m - 1$
   3) 특정한 $k(k \leq m)$개의 원소를 (안)포함하는 부분집합의 개수 : 2^{m-k}

2. 집합의 연산의 정의와 그 성질

1. 집합의 연산의 정의
   ⑴ 합집합 $A \cup B = \{x \mid x \in A \ or \ x \in B\}$
   ⑵ 교집합 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$
   ⑶ 차집합 $A - B = A \cap B^c = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$
   ※ $A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$
   ⑷ 여집합 $A^c = U - A = \{x \mid x \in U \text{ and } x \notin A\}$
   ⑸ 서로소 $A \cap B = \emptyset$
2. 연산의 성질
   ⑴ $A \cup B = X \Rightarrow A \subset X$
   ⑵ $A \cap B = X \Rightarrow X \subset A$

3. 집합의 연산법칙

1. 교환법칙 $(A \cup B) = B \cup A$
   $(A \cap B) = B \cap A$
2. 결합법칙 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. 분배법칙

$(A \cup B) \underline{\cap C} = (A \underline{\cap C}) \cup (B \underline{\cap C})$

$(A \cap B) \underline{\cup C} = (A \underline{\cup C}) \cap (B \underline{\cup C})$

4. 드모르강의 법칙

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

☞ 집합의 연산은 벤다이어그램을 이용하라.

4. 유한집합의 원소의 수

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
3. $n(A^c) = n(U) - n(A)$
4. $n(A - B) = n(A \cap B^c) = n(A) - n(A \cap B)$

* $n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

*** p 진법 ⇄ q 진법**

(1) 10진법 123을 5진법으로 고치는 방법

$$\begin{array}{r|l} 5 & 123 \\ 5 & 24 \cdots 3 \\ & 4 \cdots 4 \end{array} \qquad \therefore 123 = 443_{(5)}$$

(2) 5진법 을 10진법으로 고치는 방법

$443_{(5)} = 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 123$

5. 조건(명제)과 그 진리집합

$P = \{x \mid p\}$, $Q = \{x \mid q\}$ 일 때,
1. $P \subset Q$ 동치 $p \Rightarrow q$
2. $P \not\subset Q$ 동치 $p \nRightarrow q$
3. $P = Q$ 동치 $p \Leftrightarrow q$

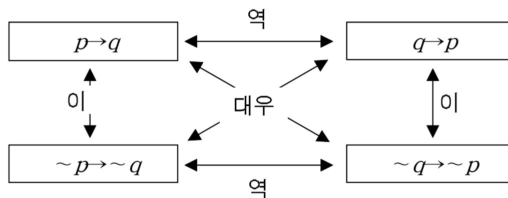
※「p인 모든 x에 대하여, q이다.」가 참 $\Rightarrow P \subset Q$

※ $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B$
$= A \Leftrightarrow A^c \cup B = U \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

6. 명제의 부정

1. $\sim(p \ or \ q) = \sim p$ and $\sim q$
2. $\sim(p$ and $q) = \sim p \ or \sim q$
3. $\sim$[「모든 x, $p(x)$」] = 「어떤 x, $\sim p(x)$」

7. 명제의 역·이·대우



☞「$p \Longrightarrow q$」이면「$\sim q \Longrightarrow \sim p$」

8. 필요·충분조건

1. $P = \{x \mid p\}$, $Q = \{x \mid q\}$일 때,
   ⑴ $P \subset Q$ 즉 $p \Rightarrow q$이면,
   p는 q되기 위한 충분조건
   q는 p되기 위한 필요조건
   ⑵ $P = Q$ 즉 $p \Leftrightarrow q$이면,
   q는 p되기 위한 필요충분조건. 즉, p와 q는 동치

2. 삼단논법: $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$

Ⅱ	1. 이항연산의 항등원과 역원의 정의	수와 식

1. "닫혀있다."
   $\forall a, b \in A$에 대하여 $a * b \in A$일 때,
   『집합 A는 연산 $*$에 대하여 닫혀있다.』고 한다.
2. 항등원 : 집합 A가 연산 $*$에 대하여 닫혀있고,
   $\forall x \in A$에 대하여 $x * e = e * x = x \cdots\cdots$①
   ☜ 항등식을 만족하는 $e \in A$가 존재할 때,
   e를 연산 $*$에 대한 항등원이라 한다.
3. 역원: 집합 A가 연산 $*$에 대하여 닫혀있고,
   연산 $*$에 대한 항등원 e가 존재하며,
   $\exists a \in A$에 대하여 $a * a' = a' * a = e \cdots$②
   ☜ 방정식을 만족하는 a'가 존재할 때,
   a'를『연산 $*$에 대한 a의 역원』이라 한다.

☞ 유한집합의「닫힘」, 항등원, 역원의 판별 ⇒ 연산표 이용

2. 이항연산의 기본법칙

1. 교환법칙 $a*b=b*a$
2. 결합법칙 $(a*b)*c=a*(b*c)$
3. 분배법칙 $(a\circ b)*c=(a*c)\circ(b*c)$
   ☞『연산 ∘에 대한 연산 *의 분배법칙』이라 한다.

※ 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 ⇒ 항등식
$x*e=e*x=x$ ⇒ x에 대한 항등식
$a*a'=a'*a=e$ ⇒ a의 역원 a'에 관한 방정식

양의 약수의 개수

$N=p^a\cdot q^b\cdot r^c$ (p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)로 소인수분해될 때,
(1) N의 양의 약수의 개수 : $(a+1)(b+1)(c+1)$
(2) N의 양의 약수의 총합 :
$(1+p+\cdots p^a)\cdot(1+q+\cdots+q^b)\cdot(1+r+\cdots r^c)$

3. 수집합의 포함관계와 사칙연산에 대한 닫힘 관계

1. 수의 분류

실수
- 유리수
  - 정수
    - 자연수 1, 2, 3, ⋯
    - 0
    - 음의정수 −1, −2, −3, ⋯
  - 유한소수 · 순환소수 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ⋯
- 무리수 − 비순환소수 $\sqrt{2}$, π, ⋯

2. 수집합의 포함관계와 사칙연산에 대한 닫힘 관계

수집합 \ 사칙연산			덧셈	뺄셈	곱셈	나눗셈
		자연수	○	×	○	×
		정수	○	○	○	×
	유리수		○	○	○	○
실수			○	○	○	○

단, 나눗셈은 0으로 나누는 경우는 제외한다.

4. 무리수의 정의와 무리수 상등

1. 유리수와 무리수의 정의
$\frac{a}{b}$ ($b\neq0$, a, b는 정수)꼴로 나타낼 수 있는 수를 유리수, $\frac{a}{b}$ ($b\neq0$, a, b는 정수)꼴로 나타낼 수 없는 수를 무리수라 한다.

2. 무리수 상등
유리수 a, b, c, d와 무리수 $\sqrt{m}$에 대하여
⑴ $a+b\sqrt{m}=0$ ⇔ $a=b=0$
⑵ $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$ ⇔ $a=c,\ b=d$

5. 실수의 사칙연산에 관한 기본성질

실수집합 R와 $\forall a, b, c, d(\in R)$에 대하여
1. $a+b\in R,\ ab\in R$
2. 교환법칙 $a+b=b+a$, $ab=ba$
3. 결합법칙 $(a+b)+c=a+(b+c)$
   $(ab)c=a(bc)$
4. 분배법칙 $(a+b)c=ac+bc$
5. 항등원 : ⑴ 덧셈에 대한 항등원 0
   ⑵ 곱셈에 대한 항등원 1
6. 역 원 : ⑴ 덧셈에 대한 a의 역원 $-a\ (\in R)$
   ⑵ 곱셈에 대한 a의 역원 $\frac{1}{a}$

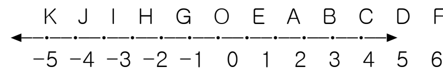
6. 실수의 연산에 대한 성질

임의의 실수 a, b, c에 대하여

① $a+c=b+c$ ⇒ $a=b$
② $c\neq0,\ ac=bc$ ⇒ $a=b$
③ $0-a=-a$ ④ $0\cdot a=0$
⑤ $(-a)b=-(ab)$ ⑥ $-(-a)=a$
⑦ $(-1)\cdot a=-a$ ⑧ $(-a)(-b)=ab$

7. 실수의 기본 성질

1. 실수의 연속성



실수는 수직선상의 점과 일대일로 대응한다.

2. 실수의 3·1법칙
임의의 두 실수 a, b에 대하여
$a>b,\ a=b,\ a<b$
중 어느 하나만 반드시 성립한다.

8. 실수의 대소에 대한 기본 성질

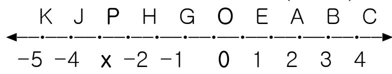
1. $a>0, b>0$ ⇔ $a+b>0, ab>0$
2. $a>b$ ⇔ $a-b>0$
3. $a>0, b>0$일 때, $a>b$ ⇔ $a^2>b^2$
4. $a>b,\ b>c$ ⇒ $a>c$
5. $a>b$ ⇒ $a+c>b+c$, $a-c>b-c$
6. $a>b,\ c>0$ ⇒ $ac>bc$, $a>b,\ c<0$ ⇒ $ac<bc$
7. $a>b,\ c>d$ ⇒ $a+c>b+d$, $a-d>b-c$
8. $a>b>0,\ c>d>0$ ⇒ $ac>bd$, $a\div d>b\div c$
9. a, b가 실수일 때,
   ① $a^2\geq0$ ☞ $a^2=0$ ⇒ $a=0$
   ② $a^2+b^2\geq0$ ☞ $a^2+b^2=0$ ⇒ $a=b=0$

9. 절대값의 정의와 그성질

1. 절대값의 정의

$O(0)$, $P(x)$일 때,

$|x| = \overline{OP} \quad \Rightarrow |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$



2. $a > 0$일 때,

(1) $|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a,\ x \geq a$

(2) $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$

3. 절대값의 성질

(1) $|x| \geq 0$ (2) $|x| = |-x|$ (3) $|x|^2 = x^2$

(4) $|xy| = |x||y|$ (5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(6) $|x+y| \leq |x| + |y|$

10. 허수단위와 복소수의 정의

1. 허수단위 $i = \sqrt{-1}$

$x^2 = -1$의 한근 $\Rightarrow i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

☞ $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$

2. 복소수(표준형)정의

$a + bi$ (a, b는 실수) ☜ a : 실수부, b : 허수부

$\Rightarrow \begin{cases} \text{실수} & (b=0) \\ \text{허수} & (b \neq 0) \\ \text{순허수} & (a=0, b \neq 0) \end{cases}$

(실수)$^2 \geq 0$ (순허수)$^2 < 0$

11. 복소수 상등

1. 복소수 상등

a, b, c, d가 실수이고, $i = \sqrt{-1}$일 때,

(1) $a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, b = 0$

(2) $a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c, b = d$

☞ 무리수 상등

유리수 a, b, c, d와 무리수 $\sqrt{m}$에 대하여

(1) $a + b\sqrt{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$

(2) $a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{m} \quad \Leftrightarrow \quad a = c,\ b = d$

12. 복소수 사칙연산

a, b, c, d가 실수일 때,

① $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

② $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

③ $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

④

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

☞ 덧셈·뺄셈 및 곱셈의 결과 ⇒ ( ) + ( ) i

13. 켤레복소수

1. 켤레복소수의 정의 (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

(1) $\overline{a - bi} = a + bi$, $\overline{a + bi} = a - bi$

(2) $(a+bi) + (a-bi) = 2a$,

$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

☞ **실계수(또는 유리수)방정식의 허근(또는 무리근)**

실계수(또는 유리수)방정식이 허근(또는 무리근)을 가지면 그 켤레복소수(또는 켤레무리수)도 근이 된다.

2. 켤레복소수성질

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$

14. 음수의 제곱근

1. 음수의 제곱근의 정의 (단, $a > 0$)

(1) $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$

(2) $x^2 = -a$ 라 하면 $x = \pm\sqrt{-a}$ 즉 $x = \pm\sqrt{a}\,i$

2. 음수의 제곱근의 곱과 몫

(1) $a < 0$, $b < 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$,

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

(2) $a > 0$, $b < 0$일 때. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{\frac{a}{b}}$,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$

※ 음수의 제곱근은 허수단위 i에 관한 식으로 나타낸다.

15. 다항식

삼차식 $4x^3 + 5x^2 - x - 7$ 에서,

1) 항 ⇒ $4x^3$, $5x^2$, $-x$, -7

2) 계수 ⇒ 4, 5, -1, -7

3) 지수 ⇒ 3, 2, 1

4) 차수 ⇒ $4x^3$: 3차(항), $5x^2$: 2차(항),

$-x$: 일차(항), -7 : 상수(항)

5) 내림차순 ⇒ $4x^3 + 5x^2 - x - 7$

오름차순 ⇒ $-7 - x + 5x^2 + 4x^3$

☞동류항: $2x^3$과 $-4x^3$ (3차항), 5와 -3 (상수항)

16. 고차·다항식의 인수분해(1)

1. 고차식은 인수정리, 조립제법을 이용한다.

2. 복이차식은 $x^2 = X$ 치환하여

(1) $X^2 + (a+b)X + ab$ 또는

(2) $X^2 - Y^2$ 꼴로 변형하여 인수분해한다.

3. 공통부분을 치환하여 인수분해공식을 적용한다.

4. 두 문자 이상의 다항식의 인수분해 3원칙

첫째 차수가 낮은 문자에 대하여

둘째 항수가 적은 문자에 대하여

세째 최고차항의 계수가 간단한 문자에 대하여 정리

⇒상수항부터 인수분해

17. $f(x) \underset{\text{전개}}{\overset{\text{인수분해}}{\rightleftarrows}} g(x)h(x)$ (1)

1. $ab \pm ac = a(b \pm c)$ (복호동순)
2. $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
   $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
3. $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$
   $x^2-(a+b)x+ab = (x-a)(x-b)$

※ $acx^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d)$

5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
6. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
   $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,
7. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$
   $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$
8. $a^3+b^3+c^3-3abc$
   $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
9. $a^4+a^2b^2+b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

18. 곱셈공식 변형

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
2. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
3. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
4. $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$
5. $(x-\frac{1}{x})^2=(x+\frac{1}{x})^2-4$
6. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
   $=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

19. 항등식의 성질과 미정계수법

1. x에 관한 항등식 성질
   ⑴ $ax+b=cx+d \Leftrightarrow a=c,\ b=d$
   ⑵ $ax+b=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$
   ⑶ $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$
2. 미정계수법
   ⑴ 수치대입법(항등식의 정의)
   $Q(x)$와 같은 식이 있어 계수를 모르는 항등식에서
   ⑵ 계수비교법(항등식의 성질)
   전개하여 계수비교가 가능한 항등식에서
   ⑶ 연조립제법
   $(x-\alpha)$에 대한 멱급수로 전개된 항등식에서

20. 다항식의 나눗셈과 항등식

다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)$라 할 때,

⑴ $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ ……… ① x에 관한 항등식
(단, $R(x)$의 차수 < $B(x)$의 차수)

⑵ $R(x)=0 \Rightarrow A(x)=B(x)Q(x)$ … ② x에 관한 항등식

21. 나머지 정리와 인수정리

1. 나머지정리
   x에 관한 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈
   나머지를 R라 하면 ⇒ R = $f(-\frac{b}{a})$
2. 인수정리
   x에 관한 다항식 $f(x)$이 일차식 $ax+b$로
   나누어 떨어진다 ⇔ $f(-\frac{b}{a})=0$
   ☞ $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

※ 조립제법 : 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 구할 때
조립제법을 이용한다.

22. G.C.D & L.C.M

A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 할 때,

⑴ $A=aG$, $B=bG$ (단, a, b는 서로소)
⑵ $L=abG$
⑶ $AB=LG$
⑷ $A \pm B=(a \pm b)G$ (복호동순)
☞ G는 합과 차 및 곱의 인수다.

23. 분수식의 부분분수와 이항분리

1. ($f(x)$의 차수)≥($g(x)$의 차수)이고 $g(x) \neq 0$ 때,
   $\frac{f(x)}{g(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{g(x)}$
   단, $f(x)=Q(x)g(x)+R(x)$
2. $\frac{k}{AB}=\frac{k}{B-A}(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})$
   $\frac{k}{ABC}=\frac{k}{C-A}(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC})$

24. 비례식과 비례상수

1. $a:b:c=x:y:z$ $\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$
   $x=ak,\ y=bk,\ z=ck$ (k : 비례상수)
2. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{lx+my+nz}{la+mb+nc}$

25. 제곱근의 정의

1. $x^2=a$ ← $x=\pm\sqrt{a}$ ☜ a의 제곱근
   ⑴ $a>0$이면 $\sqrt{a}>0$
   ⑵ $a=0$이면 $\sqrt{a}=0$
   ⑶ $a<0$이면 $\sqrt{a}$는 허수
2. $\sqrt{a}$ 의 성질
   ⑴ $\sqrt{a^2}$ = □□a □□ $= \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$
   ⑵ $(\sqrt{a})^2=a$

☞ $(\sqrt{a})^2 \neq \sqrt{a^2}$ 단, $a>0$이면 $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a$

26. 제곱근의 성질

1. $a>0$, $b>0$일 때,

⑴ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ⑵ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

⑶ $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a\geq b)$☜ 이중근호

2. 음수의 제곱근의 곱과 몫

⑴ $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$,

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

⑵ $a>0$, $b<0$일 때. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq\sqrt{\frac{a}{b}}$,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

※ 음수의 제곱근은 허수단위 i에 관한 식으로 나타낸다.

27. 식의 값 계산

1. 켤레수인 두 문자 x, y에 대한 식 $f(x, y)$의 값
먼저 $x+y$, xy값을 구하고 $f(x, y)$를 $x+y$, xy에 대한 식으로 고쳐서 그 값을 구한다.

2. 무리수인 문자 x에 대한 식 $f(x)$의 값
$x=\alpha+\beta\sqrt{m}$ ⋯ ① 을 $x-\alpha=\beta\sqrt{m}$ ⋯ ②로 고쳐 양변을 제곱하여 만든 이차방정식이 $g(x)=0$ ⋯③ 이고 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ ⋯ ④ 일 때,
$f(\alpha+\beta\sqrt{m})=R(\alpha+\beta\sqrt{m})$

2. 허수인 문자 x에 대한 식 $f(x)$의 값
$x=\alpha+\beta i$ ⋯ ①을 $x-\alpha=\beta i$ ⋯ ②로 고쳐 양변을 제곱하여 만든 이차방정식이 $g(x)=0$ ⋯③ 이고 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ ⋯ ④ 일 때,
$f(\alpha+\beta i)=R(\alpha+\beta i)$

Ⅲ 1. 방정식 $ax+b=0$ 의 해법 **방정식 부등식**

방정식 $ax+b=0$ 의 해법

i) $a\neq 0$ ⇒ $x=-\frac{b}{a}$

ii) $a=0$, $b=0$ ⇒ 모든 실수(부정)

iii) $a=0$, $b\neq 0$ ⇒ 해가 없다.(불능)

※ 방정식과 부등식의 최고차항의 계수(a)가
① 수인 경우 ⇒ $a>0$ 되게 정리한다.
② 문자인 경우 ⇒ $a=0$와 $a\neq 0$인 경우를 생각한다.

2. 방정식 $ax^2+bx+c=0$

i) 방정식 $ax^2+bx+c=0$ ⇒ $a=0$ or $a\neq 0$
ii) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ⇒ $a\neq 0$

☞ 방정식과 부등식의 최고차항의 계수(a)가
① 수인 경우 ⇒ $a>0$ 되게 정리한다.
② 문자인 경우 ⇒ $a=0$와 $a\neq 0$인 경우를 생각한다.

3. 이차방정식의 해법

1. 인수분해에 의한 해법
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ⇒ $x=\alpha$, $x=\beta$

2. 근의 공식에 의한 해법
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근
⇒ $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

☞ 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ 의 근
⇒ $x=\frac{-b'\pm\sqrt{D'}}{a}$ (단, $D'=b'^2-ac$)

4. 이차방정식의 근의 판별식 D

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $D=b^2-4ac$ 라 하면

i) $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 실근

ii) $D=0$ ⇔ 중근

iii) $D<0$ ⇔ 서로 다른 두 허근

iv) $D\geq 0$ ⇔ 실근

판별식 D	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차곡선과 직선의 교점	서로 다른 두 점에서 만남	접함	만나지 않음
이차방정식의 근	서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
이차식 $f(x)$		완전제곱	항상 $f(x)>0$ 또는 항상 $f(x)<0$

5. 이차방정식의 근과 계수와의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두근을 α, β라 하면

⇒ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

※ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

☞ 「이차방정식의 두근⋯」이라는 글귀가 들어있는 문제는 근과 계수와의 관계식을 이용한다.

6. $f(x)=0$와 $g(x)=0$의 공통근

해법1. $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수 $G(x)$를 구하여, $G(x)=0$의 근을 구한다.

해법2. 가감법을 이용하여 x에 대한 연립방정식
$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ 을 푼다.

7. 이차방정식의 근의 분리 (1)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β라 할 때,

⑴ $\alpha>0$, $\beta>0$ ⇒ $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$, $b^2-4ac\geq 0$

⑵ $\alpha<0$, $\beta<0$ ⇒ $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$, $b^2-4ac\geq 0$

⑶ $\alpha<0$, $\beta>0$ ⇒ $\alpha\beta<0$

8. 두 근이 주어진 이차방정식

두 수 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 또는 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

9. 이차방정식의 두근을 이용한 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두근을 α, β라 하면

⇒ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

10. 고차방정식의 해법

※ ⅰ) 인수정리, 조립제법을 이용하여 인수분해를 한다.
ⅱ) 공통부분을 치환한다.

1. 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 해

$f(\alpha)=0 \Rightarrow f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$(단, $a\neq0$)

∴ $x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 복이차방정식은 $x^2=X$ 치환하여

⑴ $X^2+(a+b)X+ab=0$ 또는

⑵ $X^2-Y^2=0$ 꼴로 변형하여 인수분해한다.

3. 상반방정식은 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})-2$를 이용하여

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 치환한다.

☞ 홀수차 상반방정식은 $x=-1$ 을 근으로 갖는다.

11. 삼차방정식의 근과 계수의 관계

1. 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근이 α, β, γ

$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

2. α, β, γ를 세 근으로 하는 삼차방정식

⇒ $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

12. 이원 이차 연립방정식 의 해법

1. 이원이차연립방정식 의 해법(1)-일·이차형
일차방정식을 이차방정식에 대입하여 한문자를 소거한다.

☞ 두문자의 합과 곱으로 주어진

이원이차연립방정식 $\begin{cases} x+y=\alpha & \cdots① \\ xy=\beta & \cdots② \end{cases}$ 의 해

⇒ $t^2-\alpha t+\beta=0$의 두 근

2. 이원이차연립방정식 의 해법(2)-인수분해형
상수항이 0인 식의 우변이 0이 되게 정리하여 좌변을 인수분해하면 두 개의 이원일차방정식이 얻어진다. 이를 이용하면 두 개의 일·이차형을 만든다.

3. 이원이차연립방정식 의 해법(3)-상수항 소거형
상수항을 소거하여 인수분해형을 만든다.

13. 부등식 $ax+b>0$ 의 해법

부등식 $ax+b>0$ 의 해법

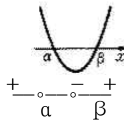
ⅰ) $a>0 \Rightarrow x>-\dfrac{b}{a}$

ⅱ) $a=0$, $b>0 \Rightarrow$ 모든 실수(부정)

ⅲ) $a=0$, $b\leqq0 \Rightarrow$ 해가 없다.(불능)

ⅳ) $a<0 \Rightarrow x<-\dfrac{b}{a}$

14. 이차부등식의 해(1)



※ $(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\alpha,\ x=\beta$

⑴ $(x-\alpha)(x-\beta)>0 \quad \Rightarrow \quad x<\alpha,\ x>\beta$

⑵ $(x-\alpha)(x-\beta)<0 \quad \Rightarrow \quad \alpha<x<\beta$

⑶ $(x-\alpha)(x-\beta)\geqq0 \quad \Rightarrow \quad x\leqq\alpha,\ x\geqq\beta$

⑷ $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\leqq x\leqq\beta$

15. 이차부등식의 해법(2)

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$	+ − + ; x α β	+ + ; x α	+ ; x
$ax^2+bx+c=0$	$x=\alpha$, $x=\beta$	$x=\alpha$(중근)	허근
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$, $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geqq0$	$x\leqq\alpha$, $x\geqq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\leqq0$	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	해가 없다

16. 부등식의 증명

1. 대소비교, 부등식의 증명

⑴ $a-b\geqq0 \quad \Leftrightarrow \quad a\geqq b$

⑵ $a>0, b>0$일 때, $a^2\geqq b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a\geqq b$

2. 중요한 절대부등식

⑴ $a>0, b>0$일 때, $a+b\geqq2\sqrt{ab}$

※ $a+b=2\sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad a=b$

⑵ $a^3+b^3+c^3\geqq3abc$

※ $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow a+b+c=0$ or $a=b=c$

⑶ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq0$

※ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c$

⑷ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$ ☜ Cauchy부등식

※ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

⑸ $|a+\dfrac{1}{a}|\geqq2$ (단, 등호는 $a=\pm1$일 때 성립한다.)

17. 이차절대부등식

모든 실수 x에 대하여

⑴ $ax^2+bx+c\geqq0$ $(a\neq0)$일 조건 : $a>0$, $D\leqq0$

⑵ $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq0)$일 조건 : $a>0$, $D<0$

⑶ $ax^2+bx+c\leqq0$ $(a\neq0)$일 조건 : $a<0$, $D\leqq0$

⑷ $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq0)$일 조건 : $a<0$, $D<0$

Ⅳ	1. 두 점 사이의 거리	**도형의 방정식**

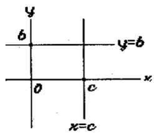
1. 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = |x_2 - x_1|$
2. 평면 위의 두 점 사이의 거리
두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
☞ 특히 원점 $O(0,0)$과 점 $A(x_1, x_2)$ 사이의 거리
$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$

2. 선분의 내분점·외분점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 $\overline{AB}$를
1. $m:n$ $(m, n>0)$으로 내분하는 점 $P(x, y)$의 좌표
$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$
2. $m:n$ $(m, n>0)$으로 외분하는 점 $Q(x, y)$의 좌표
$x = \frac{mx_2-nx_1}{m-n}$, $y = \frac{my_2-ny_1}{m-n}$ $(m \neq n)$
☞ 특히, 선분 $\overline{AB}$의 중점 $M(x, y)$의 좌표
$x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$
3. 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$의
(1) 무게중심 $G(x, y)$ 의 좌표
$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$
(2) 삼각형의 넓이
$\triangle ABC = \frac{1}{2}\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix} \right|$

3. 직선의 방정식(1) - 일차방정식

1. 직선의 방정식의 일반형
⇒ x, y에 관한 일차방정식 $Ax+By+C=0$
i) $A \neq 0$, $B=0$: $x = -\frac{C}{A}$ …① 함수가 아님
ii) $A=0$, $B \neq 0$: $y = -\frac{C}{B}$ …② 상수함수
iii) $A \neq 0$, $B \neq 0$: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ …③ 일차함수
2. 직선의 방정식의 표준형
i) y축에 평행한 직선
⇒ $x = a$
ii) x축에 평행한 직선
⇒ $y = b$



단, a, b는 상수
iii) 기울기 m $(m \neq 0)$, y절편 b인 직선
⇒ $y = mx+b$
(단, $m = \tan\theta$, θ는 직선이 x축과 이루는 양의 각)
☞ ① x절편 : $y=0$일 때의 x값 ⇒ $(x, 0)$
② y절편 : $x=0$일 때의 y값 ⇒ $(0, y)$

4. 직선의 방정식(2)

1. 기울기·절편형
기울기 m, y절편 n인 직선의 방정식
$y = mx+n$
2. 점·기울기형
점 $P(x_1, y_1)$을 지나고 기울기 m인 직선의 방정식
$y - y_1 = m(x - x_1)$
3. 두 점형
두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식
① $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1 \neq x_2$일 때)
② $x = x_1$ (단, $x_1 = x_2$일 때)
☞두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 기울기
$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1 \neq x_2$)
4. 절편형
x절편 a, y절편 b인 직선의 방정식
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
5. 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 직선군의 방정식
$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$

5. 두 직선의 위치관계

1. 두 직선
$y = m'x+n'$, $y = mx+n$ $(m \neq 0, m' \neq 0)$이
⑴ 평행할 조건 : $m = m'$, $n \neq n'$
⑵ 일치할 조건 : $m = m'$, $n = n'$
⑶ 한점에서 만날 조건 : $m \neq m'$
⑷ 수직으로 만날 조건 : $mm' = -1$
2. 두 직선
$ax+by+c=0$, $a'+b'y+c'=0$ $(aba'b' \neq 0)$이
⑴ 평행할 조건 : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
⑵ 일치할 조건 : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
⑶ 한 점에서 만날 조건 : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
⑷ 수직으로 만날 조건 : $aa'+bb'=0$

6. 점과 직선사이의 거리

1. 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리
$l = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
2. 원점 $O(0, 0)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리
$l = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7. 원의 방정식

1. 원의 방정식의 표준형

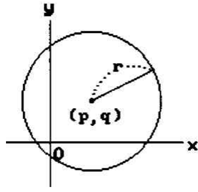
정점 $C(p,\ q)$에서 일정한 거리(r)에 있는 동점 $P(x,\ y)$의 자취

⇔ 중심 $C(p,\ q)$, 반지름 r인 원

⇒ $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \cdots$ ①

☞ 중심 $O(0,\ 0)$, 반지름 r인 원

⇒ $x^2+y^2=r^2$ ········ ②



2. 원의 방정식의 일반형

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ ········③

i) $a^2+b^2-4c>0$ ⇒ 실원

ii) $a^2+b^2-4c=0$ ⇒ 점원

iii) $a^2+b^2-4c<0$ ⇒ 허원

3. 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 의 교점을 지나는 원군의 방정식

$(x^2+y^2+ax+by+c)+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

(단, $k\neq-1$) ※ $k=-1$ 이면 교점 지나는 직선

8. 원과 직선의 위치관계

원 $x^2+y^2=r^2 \cdots$ ①과 직선 $y=mx+n \cdots$ ② 위치관계

1. ②를 ①에 대입한 이차방정식 $x^2+(mx+n)^2=r^2$ 의 판별식을 D라 할 때,

⑴ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑵ $D=0$이면 한 점에서 만난다. (접한다)

⑶ $D<0$이면 만나지 않는다.

2. 원①의 중심에서 직선 ②까지의 거리를 d라 할 때,

⑴ $r>d$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑵ $r=d$이면 한 점에서 만난다. (접한다)

⑶ $r<d$이면 만나지 않는다.

9. 원의 접선의 방정식

1. 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

☞ 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$의 기울기가 m인 접선

$y-q=m(x-p)\pm r\sqrt{m^2+1}$

2. 원 $x^2+y^2=r^2$위의 점 $T(x_1, y_1)$에서 접하는직선

$x_1x+y_1y=r^2$

☞ 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$위 점 $T(x_1, y_1)$에 서 접 선

$(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2$

10. 도형과 좌표축의 평행이동

1. 점의 평행이동: $(x,\ y)$을 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동

$f:(x,\ y)\rightarrow(x+a,\ y+b)$

2. 도형의 평행이동:도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식

$f(x-a,\ y-b)=0$

3. 좌표축의 평행이동: 도형은 그대로 두고 좌표축을 평행이동 시켜 원점을 $O'(a,\ b)$로 옮길 때

⑴ 점 $(x,\ y)$ → 점 $(x-a, y-b)$

⑵ 도형 $f(x,\ y)=0$

→ 도형 $f(X+a,\ Y+b)=0$

11. 도형의 대칭이동

1. 점의 대칭이동

x축에 대한 대칭이동

$g:(x,\ y)\ \rightarrow\ (x,\ -y)$

y축에 대한 대칭이동

$g:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-x,\ y)$

원점에 대한 대칭이동

$g:(x,\ y)\ \rightarrow\ (-x,-y)$

직선 $y=x$에 대한 대칭이동

$g:(x,\ y)\ \rightarrow\ (y,\ x)$

2. 도형의 대칭이동

도형 $f(x,\ y)=0$을 대칭이동시킨 도형의 방정식

⑴ x축에 대한 대칭이동 $f(x,-y)=0$

⑵ y축에 대한 대칭이동 $f(-x,\ y)=0$

⑶ 원점에 대한 대칭이동 $f(-x,\ -y)=0$

⑷ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동 $f(y,\ x)=0$

(5) 직선 $x=a$에 대하여 ⇒ $f(2a-x,\ y)=0$

(6) 직선 $y=b$에 대하여 ⇒ $f(x,\ 2b-y)=0$

(7) 점 $(a,\ b)$에 대하여 ⇒ $f(2a-x,\ 2b-y)=0$

※ $y=f(x)$가 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭

⇔ $f(2a-x)=f(x)$ ⇔ $f(a-x)=f(a+x)$ ☞ **적분**

12. 부등식의 영역(1)

1. 부등식 $y>f(x)$, $y<f(x)$의 영역

부등식 $y>f(x)$의 영역 ⇒ 곡선 $y=f(x)$ 윗부분

부등식 $y<f(x)$의 영역 ⇒ 곡선 $y=f(x)$ 아래부분

2. 부등식 $f(x,\ y)>0$, $f(x,\ y)<0$의 영역

곡선 $f(x,\ y)=0$위에 있지 않는 한 점의 좌표를 부등식에 대입하여

⑴ 부등식이 성립하지 않으면 그 점을 포함하지 않는,

⑵ 부등식이 성립하면 그 점을 포함하는 영역

13. 부등식의 영역(2)

부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)>0$, $f(x,\ y)g(x,\ y)\leq0$ 의 영역

※곡선 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$에 의한 분면 중 선을 공유하지 않는 영역은 같은 영역이다.

⇒ 곡선 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$위에 있지 않는 한 점의 좌표를 부등식에 대입하여

⑴ 부등식이 성립하지 않으면 그 점을 포함하지 않는,

⑵ 부등식이 성립하면 그 점을 포함하는 영역

14. 부등식의 영역과 최대·최소

부등식 $f(x,\ y)\geq0\cdots$ ①을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여, $g(x,\ y)$의 최대·최소값은?

$g(x,\ y)=k\cdots$②라 놓고, $f(x,\ y)=0$을 이용

부등식 ①의 영역을 그리고,

②의 그래프가 ①의 영역을 지날 조건을 이용한다.

※ 곡선 위의 점 $T(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식 구하는 요령

1. $x^2\ \mapsto\ x_1x$ 대입, $y^2\ \mapsto\ y_1y$ 대입

2. $(x-a)^2\ \mapsto\ (x_1-a)(x-a)$ 대입

3. $x\ \mapsto\ \frac{1}{2}(x+x_1)$ 대입, $y\ \mapsto\ \frac{1}{2}(y+y_1)$ 대입

V	1. 함수의 정의	함 수

1. 함수의 정의
⑴ 집합 X의 각 원소 x에 Y의 원소 y가 하나씩 대응 할 때, 이 대응 f를 X에서 Y로의 함수라 하고
기호 $f: X \to Y$, $y=f(x)$ 또는 $X \xrightarrow{f} Y$, $f: x \to y$ 로 나타낸다.
① X를 함수 f의 정의역, Y를 함수 f의 공역
② $f(x)$를 x에서의 f의 함수값 또는 f에 의한 x의 상이라 한다.
⑵ x의 상 $f(x)$ 전체의 집합
$\{f(x) | x \in X\}$을 함수 f의 치역이라 하고
기호 $f(X)$로 나타낸다.
2. 일대일 대응
함수 $f: X \to Y$에서 임의의 x_1, $x_2 (\in X)$에 대하여
ⅰ) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ⅱ) $f(X)=Y$
가 성립할 때, 함수 f를 일대일 대응이라고 한다.
3. 상수함수 ☞ 상수함수의 그래프
함수 $f: X \to Y$에서 임의의 $x \in X$에 대하여,
$f(x)=b$(일정)
일 때, 이 함수를 상수함수라 한다. (단, $b \in Y$)
4. 항등함수 ☞ 일차함수의 그래프
$f: X \to Y$에서 임의의 $x \in X$에 대하여,
$f(x)=x$ 일 때, 이 함수 f를 항등함수라 한다.

2. 합성함수와 역함수

1. 합성함수
두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대하여
f와 g에 의 하여 정해지는 함수를 f와 g의 합성함수라 하고, 기 호 $g \circ f: X \to Z$로 나타낸다.

※ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
① $f \circ g \neq g \circ f$ ② $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

2. 역함수
함수 $f: X \to Y$, $y=f(x)$가 일대일 대응일 때
함수 $f^{-1}: Y \to X$, $x=f^{-1}(y)$을 함수 f의 역함수라 한다.

$y=f(x) \ (x \in X, y \in Y)$
$\Rightarrow y=f^{-1}(x) \ (x \in Y, y \in X)$
① $a=f^{-1}(b) \Leftrightarrow b=f(a)$
② $(f^{-1})^{-1}=f$
③ $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$ (e:항등함수)
④ $f \circ h = g \Rightarrow h = f^{-1} \circ g$,
$h \circ f = g \Rightarrow h = g \circ f^{-1}$

3. 상수함수와 일차함수의 그래프 - 직선

1. 상수함수 $f(x)=b$, $y=b$ (단, b 상수)의 그래프
⇒ x축에 평행한 직선
☞ ⑴ x축에 평행한 직선의 방정식
$y=b$ (단, b: 상수)
⑵ y축에 평행한 직선의 방정식
$x=a$ (단, a: 상수)

2. 일차함수 $y=mx+b$ (단, $m \neq 0$)의 그래프
기울기 $m=\tan\theta$, y절편 b인 직선
(단, θ는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각)

4. 이차함수의 그래프(1) - 포물선

1. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ ☜ 표준형
⑴ 꼭지점 (p, q), 대칭축 $x=p$인 포물선
⑵ $a>0$: ① 아래로 볼록
② $x=p$일때 최소값 $y=q$
$a<0$: ① 위로 볼록
② $x=p$일때 최대값 $y=q$
⑶ $|a|$가 클수록 폭이 좁다.

2. 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ☜ 절편형
⑴ x절편 : α, β ⑵ 대칭축 : $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

5. 이차함수의 그래프(2)

3. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ ☜ 일반형
⑴ 꼭지점$\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$, 대칭축 : $x=-\dfrac{b}{2a}$
⑵ $a>0$
: $x=-\dfrac{b}{2a}$ 일때 최소값 $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$
$a<0$
: $x=-\dfrac{b}{2a}$ 일때 최대값 $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$
☞ $y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ $(a \neq 0)$

4. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 x축과의 위치관계
⑴ $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 점에서 만난다.
⑵ $D=0$ ⇔ 접한다.
⑶ $D<0$ ⇔ 만나지 않는다.
⑷ $D \geq 0$ ⇔ 만난다. (단, $D=b^2-4ac$)

6. 이차방정식의 근의 분리 (2)

※ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 분리
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α, β와 상수 k(기준값이라 하자)사이의 대소 관계에 관한 문제를 이차방정식의 근의 분리에 관한 문제라 한다.
☞ 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프를 그려서,
① **판별식** $b^2-4ac \geq 0$
② **대칭축** $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 과 기준값 k의 대소 관계
③ **기준점의** y**좌표** $f(k)$의 부호
를 조사, 위 3가지를 동시에 만족하는 조건을 구한다.

◎ 이차함수의 그래프의 응용

$a>0$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$			
$ax^2+bx+c=0$	$x=\alpha, x=\beta$	$x=\alpha$(중근)	허근
$ax^2+bx+c>0$	$\alpha<x, x>\beta$	$x\neq\alpha$	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$	$\alpha\leq x, x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	해가 없다	해가 없다
$ax^2+bx+c\leq0$	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	해가 없다

7. 분수함수의 그래프 - 쌍곡선

1. $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ ($a\neq0$) ☜ 표준형

 ⑴ 점근선 : $x=p,\ y=q$

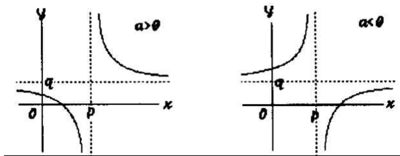
 ⑵ 정의역 : $x\neq p$인 모든 실수

 치 역 : $y\neq q$인 모든 실수

 ⑶ 두 점근선에 의한 사분면에 대하여,

 $a>0$: Ⅰ, Ⅲ 사분면을 지나고
 점 $(p,\ q)$에 대칭인 직각쌍곡선

 $a<0$: Ⅱ, Ⅳ 사분면을 지나고
 점 $(p,\ q)$에 대칭인 직각쌍곡선



2. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq0,\ a\neq0$ or $b\neq0$) ☜ 일반형

 부분분수로 고쳐 표준형을 만든다.

 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{r(\text{나머지})}{cx+d}+q(\text{몫})$

※ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$

$f(x)$의 점근선 : $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$

≒ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

8. 최대값과 최소값(1)

1. 방정식 $f(x,\ y)=0\cdots$①을 만족하는 실수 x, y에 대하여, $g(x,\ y)$의 최대·최소값은?

 $g(x,\ y)=k\cdots$②라 놓고

 해법1) ①, ②의 그래프가 만날 조건을 이용한다.

 해법2) ①을 ②에 대입하여, 함수 k의 최대·최소값을 구한다.

 해법3) ②를 ①에 대한 이차방정식에서 $D\geq0$인 k값의 범위를 구한다.

 해법4) $x>0$, $y>0$일 때, $x+y\geq2\sqrt{xy}$를 이용.

 ☞ $xy=c$(일정) ⇒ $x+y$은 $x=y$일 때, 최소값,

 $x+y=c$(일정) ⇒ xy은 $x=y$일 때, 최대값을 갖는다.

2. 부등식 $f(x,\ y)\geq0\cdots$ ③을 만족하는 실수 x, y 에 대하여, $g(x,\ y)$의 최대·최소값은?

 $g(x,\ y)=k\cdots$②라 놓고

 해법5) $f(x,\ y)=0\cdots$①을 이용하여 부등식 ③의 영역을 그리고 ②, ③의 그래프가 만날 조건을 이용

9. 무리함수의 그래프 - 반포물선

$y=k\sqrt{a(x-p)}+q$ ($a\neq0,\ k\neq0$)

⑴ 정의역 $a>0$: $x\geq p$, $a<0$: $x\leq p$

⑵ 치역 $k>0$: $y\geq q$, $k<0$: $y\leq q$

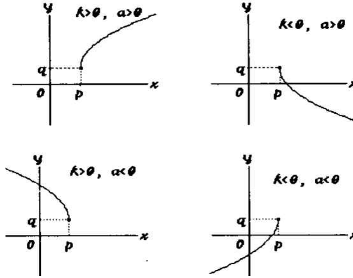
⑶ 꼭지점 $(p,\ q)$

⑷ $a>0,\ k>0$: 오른 쪽, 위로 복록

 $a>0,\ k<0$: 오른 쪽, 아래로 볼록

 $a<0,\ k>0$: 왼 쪽, 위로 볼록

 $a<0,\ k<0$: 왼 쪽, 아래로 볼록 한 반포물선



Ⅵ	1. 일반각과 호도법	**삼각함수**

1. 일반각과 호도법

 ⑴ 동경이 이루는 일반각

 동경과 시초선이 이루는 한 각의 크기가 α°일 때,

 일반각 Θ°는 $\Theta^\circ=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n 은 정수)

 ⑵ 호도법

 1(라디안) = $\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$(라디안)

60분법	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
호도법	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2. 부채꼴의 호의 길이와 넓이

 반지름의 길이 r, 중심각의 크기 Θ인 부채꼴에서

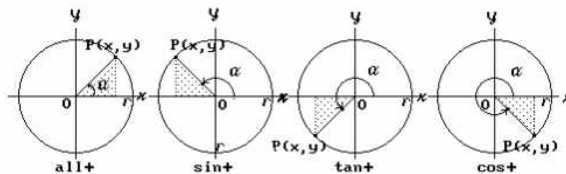
 ⑴ 호의 길이 ⇨ $l=r\Theta$

 ⑵ 면적 ⇨ $S=\dfrac{1}{2}r^2\Theta=\dfrac{1}{2}rl$

2. 일반각의 삼각함수의 정의

1. $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$, $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$, $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$

2. $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{r}{y}$, $\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$, $\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$



	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\Theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\Theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\tan\Theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳	0	╳	0

3. 삼각함수 상호간의 관계식

(1) $\operatorname{cosec}\Theta=\frac{1}{\sin\Theta}$, $\sec\Theta=\frac{1}{\cos\Theta}$, $\cot\Theta=\frac{1}{\tan\Theta}$

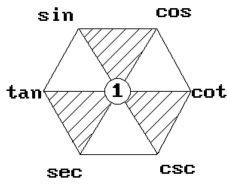
(2) $\tan\Theta=\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}$,

$\cot\Theta=\frac{1}{\tan\Theta}$

(3) $\sin^2\Theta+\cos^2\Theta=1$

$1+\tan^2\Theta=\sec^2\Theta$

$1+\cot^2\Theta=\operatorname{cosec}^2\Theta$



Θ

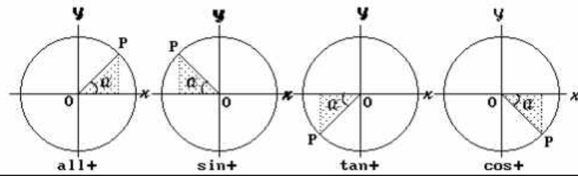
4. 삼각함수의 값의 부호 와 그 성질

1. $\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha$
   $\cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha$
   $\tan(2n\pi+\alpha)=\tan\alpha$

2. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
   $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
   $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

3. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
   $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
   $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

4. $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
   $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
   $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$



※ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 일 때, $\sin\alpha=\cos\beta$

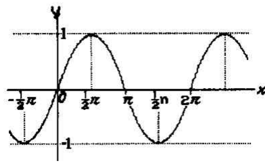
(1) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ (2) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

5. 주기함수

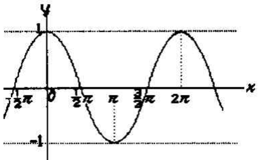
$f(x+p)=f(x)$가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라 하고, 상수 p 중에서 최소의 양수를 f의 주기라 한다.

6. 삼각함수의 그래프(1)

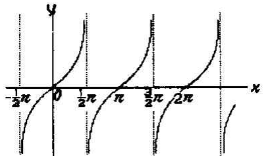
1. $y=\sin x$
   (1) 주기 : 2π
   (2)치역 : $-1\leq \sin x\leq 1$
   (3) 원점 $(0,0)$에 대칭
   ⇒ 기함수



2. $y=\cos x$
   (1) 주기 : 2π
   (2)치역: $-1\leq \cos x\leq 1$
   (3) y축에 대칭
   ⇒ 우함수



3. $y=\tan x$
   (1) 주기 : π
   (2)치역: $-\infty < \tan x < \infty$
   (3) 원점 $(0,0)$에 대칭
   ⇒ 기함수



7. 삼각함수의 그래프(2)

1. $y=r\sin\omega(x-p)+q$ $(r\neq 0)$
   (1) 주기 : $\frac{2\pi}{|\omega|}$
   (2) 치역 : $q-|r|\leq y\leq q+|r|$
   (3) 점 $(p,\ q)$을 지나며 점 $(p,\ q)$에 관하여 대칭

2. $y=r\cos\omega(x-p)+q$ $(r\neq 0)$
   (1) 주기 : $\frac{2\pi}{|\omega|}$
   (2) 치역 : $q-|r|\leq y\leq q+|r|$
   (3) 점 $(p,\ r+q)$을 지나며, 직선 $x=p$에 관한 대칭

3. $y=r\tan\omega(x-p)+q$ $(r\neq 0)$
   (1) 주기 : $\frac{\pi}{|\omega|}$
   (2) 치역 : $-\infty < y < \infty$
   (3) 점 $(p,\ q)$을 지나며 점 $(p,\ q)$에 관하여 대칭

8. 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인법칙:ΔABC의 외접원의 반지름의 길이 R일 때,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

2. 코사인법칙
   (1) 제일 코사인법칙
   $a=b\cos C+c\cos B$
   $b=c\cos A+a\cos C$
   $c=a\cos B+b\cos A$
   (2) 제이 코사인법칙
   $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
   $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
   $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

※ 제이코사인법칙의 변형 : $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

9. 삼각형의 넓이

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$=\frac{abc}{4R}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (단, $2s=a+b+c$)

$=rs$ (단, r은 내접원 의 반지름)

☞사변형의 넓이: 두 대각선 $p,\ q$이 이루는 각을 Θ일 때

$S=\frac{1}{2}pq\sin\Theta$

◆세 꼭지점이 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$일 때,

$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$

◆ n개의 점 $A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$,$\cdots$, $A_n(x_n,y_n)$ 를 꼭지점으로 하는 n각형의 넓이

$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3\cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3\cdots & y_n & y_1 \end{matrix}\right|$

◆ $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 할 때, $\triangle OAB$의 면적

$S=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

Ⅶ	1. 지수법칙	**지수와 로그**

$a>0$, $b>0$일 때, 임의의 실수 m, n에 대하여

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　　2. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$　　4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b \neq 0$)

5. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

2. 음의 정수와 0, 분수 지수의 정의

a가 실수, m이 정수, n이 양의 정수일 때

⑴ $a^0 = 1$ (단, $a \neq 0$)

⑵ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (단, $a \neq 0$)

⑶ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, n이 짝수일 때는 $a>0$)

3. 거듭제곱근과 그 성질

1. 거듭제곱근
   1) n이 짝수일 때: $x^n = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$
      - $a>0$이면 $\sqrt[n]{a} > 0$
      - $a=0$이면 $\sqrt[n]{a} = 0$
      - $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}$는 허수
   2) n이 홀수일 때: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$
      - $a>0$이면 $\sqrt[n]{a} > 0$
      - $a=0$이면 $\sqrt[n]{a} = 0$
      - $a<0$이면 $\sqrt[n]{a} < 0$

2. 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n은 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$　④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

⑤ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

4. $\sqrt[n]{a}$의 성질

1) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} □□a □□ \ (n: 짝수) = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases} \\ a \quad (n: 홀수) \end{cases}$

2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

☞ $(\sqrt[n]{a})^n \neq \sqrt[n]{a^n}$

단, $a>0$이면 $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$

5. 지수함수와 그 그래프

지수함수 $y = a^x$ (단, $a>0$, $a \neq 1$)의 그래프

⑴ 정의역 : $-\infty < x < \infty$, 치역 : $y>0$

⑵ 점 $(0, 1)$을 지난다.　　⑶ 점근선 : x축

⑷ $a>1$: 증가함수, $0<a<1$: 감소함수

⑸ 그래프 $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$와 y축에 관하여 대칭이다.

a>1　　0<a<1

☞ 지수함수 $y = a^x$가 정의될 조건 : $a>0$, $a \neq 1$

※ $f(x) = a^x \Leftrightarrow f(x+y) = f(x)f(y)$

6. 지수방정식과 지수부등식의 해법

1. 지수방정식의 해법

⑴ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ 또는 $a=1$

⑵ $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow a = b$ 또는 $f(x) = 0$

⑶ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow$ 양변에 로그를 취한다.

⑷ 3항 이상의 방정식은 $a^x = X\ (>0)$로 치환한다.

2. 지수부등식의 해법

⑴ $a>1$일 때,

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

⑵ $0<a<1$일 때,

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

⑶ 3항 이상의 부등식은 $a^x = X\ (>0)$로 치환한다.

7. 로그의 정의와 그의 성질

1. $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$일 때

$a^n = x \Leftrightarrow n = \log_a x$

☞ $\log_a x$가 정의될 조건 $\Rightarrow$ $a>0$, $a \neq 1$, $x>0$

2. 로그의 성질

a, b, c는 1이 아닌 양수이고, $n \neq 0$, $x>0$, $y>0$일 때

⑴ $\log_a 1 = 0$　　⑵ $\log_a a = 1$

⑶ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

⑷ $\log_a x^n = n\log_a x$

⑸ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

⑹ $\log_{a^n} x^m = \dfrac{m}{n}\log_a x$ $(a>0, x>0, x \neq 1)$

⑺ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

8. 로그함수와 그 그래프

로그함수 $y = \log_a x$ (단, $a>0$, $a \neq 1$)

⑴ 정의역 : $x>0$, 치역 : $-\infty < y < \infty$

⑵ 점 $(1, 0)$을 지난다.

⑶ 점근선 : y축

⑷ $a>1$: 증가함수, $0<a<1$: 감소함수

⑸ 그래프 $y = a^x$와 $y = x$축에 관하여 대칭이다.
(상호 역함수이다.)

a>1　　0<a<1

☞로그함수 $y = \log_a x$가 정의될 조건

: $x>0, a>0, a \neq 1$

※ $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow f(xy) = f(x) + f(y)$

9. 로그방정식과 로그부등식 해법(1)

1. 로그방정식

⑴ $\log_a f(x) = b \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^b & \cdots\cdots ① \\ f(x)>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

⑵ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) & \cdots ① \\ f(x)>0 & \cdots ② \\ g(x)>0 & \cdots ③ \end{cases}$

⑶ $A^{\log_a f(x)} = B \Rightarrow$ 양변에 로그를 취한다.

⑷ $(\log_a x)^2$항이 있으면 $\log_a x = X$로 치환한다.

☞ 로그가 정의될 조건을 만족하는 것만 해가 된다.

9. 로그방정식과 로그부등식 해법(2)

2. 로그부등식

⑴ $a>1$일 때,

① $\log_a f(x) > \log_a f(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$

② $\log_a f(x) > b \Rightarrow f(x) > a^b,\ f(x) > 0$

⑵ $0 < a < 1$일 때,

① $\log_a f(x) > \log_a f(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$

② $\log_a f(x) > b \Rightarrow f(x) < a^b,\ f(x) > 0$

⑶ $(\log_a x)^2$항이 있으면 $\log_a x = X$로 치환한다.

☞ 로그가 정의될 조건을 만족하는 것만 해가 된다.

10. 상용로그의 정의 및 지표와 가수의 성질

1. 밑을 10으로 하는 로그 $\log A = \log_{10} A$

2. $\log A = n + \alpha$ (단, n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

↑ 지표 ↑ 가수

☞ $n = [\log A]$, $\alpha = \log A - [\log A]$

11. 가우스 함수 성질

정의 $[x]$: x보다 크지 않는 최대 정수, x의 정수부분

$\{x\} = x - [x]$: x의 소수부분

(1) $[x]$는 정수. $0 \leq \{x\} < 1$

(2) $[x] \leq x < [x]+1$, $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

(3) $[x+k] = [x] + k$(단, k는 정수)

(4) $N! = 2^a 3^b 5^c \cdots \Rightarrow a = \left[\frac{N}{2}\right] + \left[\frac{N}{2^2}\right] + \left[\frac{N}{2^3}\right] + \cdots$

12. 상용로그의 지표와 가수의 성질

1 지표의 성질 : ※ 진수의 자리수를 결정한다.

① $\log A$에서 A의 정수부분이 n자리

⇨ $10^{n-1} \leq A < 10^n$ ⇨ $\log A$의 지표가 $n-1$

$\log A$의 지표가 n

⇨ $10^n \leq A < 10^{n+1}$ ⇨ A의 정수부분이 n+1자리

② $\log A$의 진수 A가 소수점 아래 n번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 때

⇨ $10^{-n} \leq A < 10^{-n+1}$

⇨ $\log A$의 지표는 $\overline{n}(=-n)$

2 가수의 성질 : ※ 진수의 숫자배열을 결정한다.

① 두 진수 A, B의 숫자 배열은 같고, 소수점의 위치만 다를 때 $\log A$와 $\log B$의 가수는 같다.

② $\log A$와 $\log B$의 가수는 같다.

⇨ $\log A - \log B =$ (정수)

☞ $\log A$의 지표를 n, 가수를 α라고 할 때,

$\log A^k = k \log A = kn + k\alpha$, $0 \leq k\alpha < k$에서 먼저 가수를 결정해야 지표를 결정할 수 있다.

☞ 몇 자리수? ⇒ 상용로그를 취하여 지표를 보고

☞ 최고자리숫자는? ⇒ 상용로그를 취하여 가수를 보고 판별한다.

Ⅷ	1. 行列의 정의와 相等	행 렬

1. $m \times n$ 행렬(行列 matrix) A의 (i, j)성분을 a_{ij}라면

⑴ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$로 나타내며,

⑵ $A = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 로 나타내기도 한다.

2. 같은 꼴의 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$에 대하여,

$A = B$ (상등) $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = b_{ij}$

(단, $i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$)

2. 영행렬 O와 행렬 $-A$

1. 영행렬 O: 모든 성분이 0인 행렬

예) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. 행렬 $-A$: 행렬 A의 모든 성분의 부호를 바꾼 행렬

예) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$이면

$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

3. 행렬의 덧셈과 뺄셈

같은 꼴의 두 행렬 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$에 대하여,

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$

(단, $i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$)

4. 행렬의 덧셈에 대한 성질

같은 꼴의 행렬 A, B, C, O에 대하여,

1. 교환법칙 $A + B = B + A$
2. 결합법칙 $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. 항등원 $A + O = O + A = A$
4. 역원 $A + (-A) = (-A) + A = O$

5. 행렬의 실수배와 그의 성질

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$이면

$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$

2. 결합법칙 $(kl)A = k(lA)$
3. 분배법칙 $(k + l)A = kA + lA$

$k(A + B) = kA + kB$

단, k, l은 임의의 실수, A, B는 같은 꼴의 행렬

Note 정수의 개수: $a, b \in Z$에 대하여

ⅰ) $a \leq x \leq b$인 정수 x의 개수 = $b - a + 1$

ⅱ) $a \leq x < b$인 정수 x의 개수 = $b - a$

ⅲ) $a < x \leq b$인 정수 x의 개수 = $b - a$

ⅳ) $a < x < b$인 정수 x의 개수 = $b - a - 1$

6. 행렬의 곱셈

1. 행렬의 곱셈

$A \times B = AB$

$(m\times n)$ 행렬 $(n\times l)$ 행렬 $(m\times l)$ 행렬

ⅰ) 행렬의 곱 AB가 정의되기 위해서는 반드시 A의 열의 개수와 B의 행의 개수가 같아야 한다.

ⅱ) 행렬의 곱 AB는 정의되지만, AB는 정의되지 않을 때도 있다.

※ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ 일 때,

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

☞ A의 제i행과 B의 제j열의 성분을 차례로 곱하여 더한 것

7. 단위 행렬

같은 꼴의 두 정사각행렬 A, E에 대하여

$AE=EA=A$

☞ 행렬의 곱셈에 대한 항등원 E를 단위행렬이라 한다.

이차단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 삼차단위행렬 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

※ ⅰ) $A^2+A+E=O \Rightarrow A^3-E=O \Leftrightarrow A^3=E$

ⅱ) $A^2-A+E=O \Rightarrow A^3+E=O \Leftrightarrow A^3=-E \Rightarrow A^6=E$

ⅲ) $A^m=A^n=E$ (m, n은 서로 소인 자연수) $\Rightarrow A=E$

8. 행렬의 곱셈에 대한 성질

1. 합과 곱이 정의 되는 행렬 A, B, C에 대하여

⑴ 결합법칙 $(kA)B=A(kB)=k(AB)$

$(AB)C=A(BC)$

⑵ 분배법칙 $(A+B)C=AC+BC$

(단, k는 임의의 실수)

☞ $AB\neq BA$, $(A+B)C\neq CA+CB$

$(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$ ($\because AB\neq BA$)

2. 영인자(零因子 zero divisor)

$A\neq O,\ B\neq O,\ AB=O \Rightarrow A, B$: 영인자

※ $A\neq O,\ B\neq O \not\Rightarrow AB\neq O$

(반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

9. 행렬의 거듭제곱

A : n차 정사각행렬

$\Rightarrow AA=A^2,\ AAA=A^3,\ AAAA=A^4, \cdots$

※ ⅰ) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

ⅱ) $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & b^n \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

◘ $A\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s\end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s\end{pmatrix}$

10. 케일리-헤밀턴 정리

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 등식

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ⋯ ①

이 성립한다. 이 등식 ①을 A의 케일리-헤밀턴 정리.

☞ Cayley-Hamilton 정리의 응용

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $A\neq kE$, $A^2-pA+qE=O$

$\Rightarrow p=a+d,\ \ q=ad-bc$

※ 행렬에 관한 고차식의 값을 구할 때

⇒ Cayley-Hamilton 정리를 이용하여 차수를 낮춘다.

11. 이차정사각행렬의 역행렬

1. 역행렬(逆行列 inverse matrix)의 정의

영행렬이 아닌 정사각행렬 A에 대하여

$AX=XA=E$

를 만족하는 행렬 X(행렬의 곱셈에 대한 A의 역원)가 존재할 때, X를 A의 역행렬이라 하고 기호 A^{-1}로 나타낸다. 즉, $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

(단, 행렬 E는 행렬 A와 같은 꼴의 단위행렬)

2. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여

⑴ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$: 역행렬을 갖는다.

$\Leftrightarrow D=|A|=ad-bc\neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$

⑵ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$: 역행렬을 갖지 않는다.

$\Leftrightarrow D=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc=0$

11. 이원일차연립방정식과 행렬

1. 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q\end{pmatrix}$ 의 해

⑴ $ad-bc\neq 0$일 때,

$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q\end{pmatrix}$

⑵ $ad-bc=0$일 때, 부정 또는 불능

2. 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$ 의 해

⑴ $D=ad-bc\neq 0$:오직 한쌍의 해 ($x=y=0$ 뿐)

⑵ $D=ad-bc=0$:부정 ($x=y=0$ 이외의 해 존재)

∯ 행렬의 합답형

1. $A\neq O$, $AB=AC$ 이면 $B=C$ 이다.(거짓)
2. $AB=kE$ 이면 $BA=kE$이다.(참)
3. $AB=O$ 이면 $BA=O$이다.(거짓)
4. $A+B=kE$(k는 실수) 이면 $AB=BA$이다.(참)
5. $AB=kE$(k는 실수) 이면 $AB=$ BA이다.(참)

6. $AB=A+B$ 이면 $AB=BA$이다.(참)
7. $aA+bB+cE=O$(a, b, c는 실수) 이면 $AB=BA$이다.(참)
8. $(AB)^n=A^nB^n$(n : 자연수) 이면 $AB=BA$이다.(거짓)
9. A, B의 역행렬이 각각 존재하고 $(AB)^n=A^nB^n$(n : 자연수) 이면 $AB=BA$이다.(참)
10. $A-B=E$ 이면 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이다.(참)
11. $AB=A$, $BA=B$ 이면 $A^2=A$, $B^2=B$이다.(참)
12. $(A-E)^3=O$, $A^3=E$ 이면 $A=E$이다.(참)
13. $A+B=E$, $AB=BA=O$ 이면 $A^n+B^n=E$ (n은 자연수) 이다.(참)
14. $A+A^{-1}=B$ 이면 $AB=BA$이다.(참)
15. $A^2=O$ 이면 $A=O$이다.(거짓)
16. $A^3=O$ 이면 $A=O$이다.(거짓)
17. $A^3=O$ 이면 $A^2=O$이다.(참)
18. $A^4=O$ 이면 $A^2=O$이다.(참)
19. $A^n=O$ $(n\geq 3)$ 이면 $A^2=O$ 이다.(참)
20. $(A-B)^2=O$ 이면 $A=B$이다.(거짓)
21. $A\neq O$, $AB=O$ 이면 $B=O$ 이다.(거짓)
22. $A\neq O$, $AB=AC$ 이면 $B=C$ 이다.(거짓)
23. $A^n=O$ 이면 A는 역행렬을 갖지 않는다.(참)
24. $A^3=O$ 이면 $E-A$의 역행렬이 존재한다.(참)
25. $A^3=O$ 이면 $A+E$의 역행렬이 존재한다.(참)
26. $A^2-A+E=O$ 이면 A의 역행렬이 존재한다.(참)
27. $A^2+A+E=O$ 이면 A^2의 역행렬이 존재한다.(참)
28. $A^2=O$ 이면 $A+E$의 역행렬이 존재한다.(참)
29. $A^2=E$ 이면 $E+A$의 역행렬이 존재한다.(거짓)
30. $A=A^{-1}$ 이면 $A+E$의 역행렬이 존재한다.(거짓)
31. $A=A^{-1}$ 이면 $A-E$의 역행렬이 존재한다.(거짓)
32. $A=A^{-1}$ 이면 $A+3E$의 역행렬이 존재한다.(참)
33. $A\neq E$, $A^2=A$ 이면 A는 역행렬이 존재한다.(거짓)
34. $A\neq kE$, $A^2=kA$ 이면 A는 역행렬이 존재하지 않는다.(참)
35. AB의 역행렬이 존재하면 A, B 모두 역행렬이 존재한다.(참)
36. A, B 모두 역행렬이 존재하면 AB의 역행렬도 존재한다.(참)
37. A의 역행렬이 존재하면 A^2의 역행렬도 존재한다. (참)
38. A^2의 역행렬이 존재하면 A의 역행렬도 존재한다. (참)
39. A, B의 역행렬이 각각 존재하면 $A+B$의 역행렬도 존재한다.(거짓)
40. $A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 A는 역행렬을 갖지 않는다.(참)
41. $A^n=O$ 이면 $A=A^2=A^3=\cdots=A^n=O$이다.(거짓)
42. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2-A+E=O$을 만족시키면 $a+d=1$이다.(참)
43. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(b\neq 0)$가 $A^2-4A+3E=O$을 만족시키면 $a+d=4$이다.(참)
44. A, B중 적어도 하나가 역행렬을 가지면 $AB\neq O$이다. (단, $A\neq O, B\neq O$) (참)
45. $AB=O$ 이면 A, B중 적어도 하나는 역행렬을 갖지 않는다.(참)
46. $A^4=A^7=E$ 이면 $A=E$이다.(참)
47. $A^4=A^6=E$ 이면 $A=E$이다.(거짓)
48. $A^2+A=O$ 이면 $A^{2n+1}=A$ (n : 자연수)이다.(참)
49. $A^3+A^2+A=O$ 이면 A^2+E의 역행렬이 존재한다.(참)
50. $A^3+A^2+A+E=O$이면 A^{-1}가 존재한다.(참)

결론적으로 아래 세 명제를 정확히 이해 할 수 있어야 한다.

1. 두행렬 A, B에 대하여 행렬 $B=kA+lE$이면 $AB=BA$이다. (참)
2. $AB=O$ 이면 A, B는 모두 역행렬이 존재하지 않는다. (거짓)
3. $AB=E$ 이면 A, B는 모두 역행렬이 존재한다. (참)

10. 역행렬의 성질

임의의 정사각행렬 A의 역행렬을 A^{-1}라 하면

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$ (2) $E^{-1}=E$
(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ☞ $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$
(4) $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$ (단, m은 자연수)
(5) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ (단, $k\neq 0$)
(6) $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$, $XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$
(7) $A=PBP^{-1}$ $\Rightarrow$ $A^n=PB^nP^{-1}$

Def. 행렬식(行列式 determinant)
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $D=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$:

Note 행렬식【교과과정 외】
행렬식은 정사각행렬에서 정의되고 다음의 성질을 갖는다.
ⅰ) 행렬의 행과 열을 맞바꾸어도 그 값은 변하지 않는다.
ⅱ) 행렬의 두 행(열)을 바꾸면 행렬식의 부호가 바뀐다.
ⅲ) 행렬의 한 행(열)을 k배하면 행렬식의 값도 k배된다.
Thm. $|AB|=|A||B|$
memo. 행렬식은 실수(real number)다.

Ⅸ	1. 等差數列 Arithmetic Progression	數列 Sequence

1. 정의 $a_{n+1}-a_n=d$ (단, d : 상수)
$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=d$
2. 일반항 $a_n=a+(n-1)d$
$a_n=\alpha n+\beta$ $(\alpha=d)$
3. 합 $S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$
$=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ $(d=2\alpha)$

☞ $\gamma=0$ ⇔ 첫째항부터 등차수열
$\gamma\neq 0$ ⇔ 제 2항부터 등차수열

(단, a : 첫째항, d : 공차(公差 common difference))

☞ 세 수 a, b, c가 등차수열을 이룬다.

⇔ ① $2b=a+c$, $b=\frac{a+c}{2}$: 등차중항(산술평균)
(等差中項 arithmetic mean)
② $a-d, a, a+d$ or $a, a+d, a+2d$

2. 합과 일반항

처음 n항까지의 합이 S_n일 때. 일반항 a_n은
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$, $a_1=S_1$

3. 調和數列 Harmonic Progression)

역수가 등차수열인 수열.

$\{a_n\}$: 조화수열(H.P.) ⇔ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$: 등차수열(A.P.)

1. 정의 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=d$ (단, d: 상수)

$\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$

3. 일반항 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d$

☞ 세 수 a, b, c가 조화수열을 이룬다.

⇔ $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$: 조화중항(조화평균)

▶ $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$가 양수일 때,

i) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$: 산술평균

ii) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$:기하평균

iii) $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 의 조화평균

4. 等比數列 Geometric Progression

1. 정의 $a_{n+1}\div a_n=r$ (단, r : 상수)

$a_{n+2}\div a_{n+1}=a_{n+1}\div a_n$

2. 일반항 $a_n=ar^{n-1}$

3.합 $S_n=\begin{cases} na & (r=1) \\ \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1)\end{cases}$ (a : 첫째항)

$=\begin{cases} na & (r=1) \\ \frac{a(r^n-1)}{r-1} & (r\neq 1)\end{cases}$ (r: 공비(公比))

☞ 세 수 a, b, c가 등비수열을 이룬다.

⇔ ① $b^2=ac$, $b=\pm\sqrt{ac}$: 등비중항(기하평균)

② $\frac{b}{r}, b, br$ or a, ar, ar^2

5. $\sum$의 정의 와 기본성질

1. 정의 : $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

☞ ⑴ $S_n=\sum_{k=1}^{n}$(일반항)

⑵ $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i$

2. $\sum$의 기본 성질

⑴ $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$

⑵ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

⑶ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

6. 군수열

군수열의 해법

⑴ 군의 특징을 파악한다.

⑵ 각 군의 첫째항들로 이루어지는 수열을 이용하여 n군의 첫째항을 구한다.

⑶ a_n이 l군 t번째 항일 때, 1군의 첫째항에서 l군 끝항까지의 항수를 $p(l)$이라 하면,

$n=p(l-1)+t$ …… ①

$n>p(l-1)$ …… ② 임을 이용한다.

7. $\sum$의 공식

1. $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

3. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

4. $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left\{\sum_{k=1}^{n}k\right\}^2$

8. 계차수열을 이용한 일반항

$b_n=a_{n+1}-a_n$ ⇒ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

☞ 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라 한다.

☺ 원리합계(元利合計)

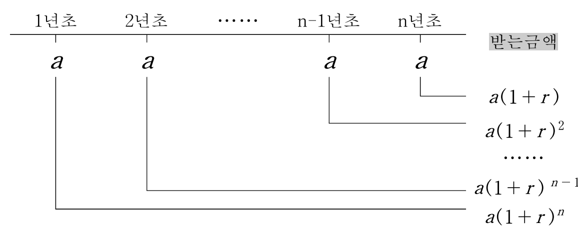
i) 연이율 r, 1년마다의 복리로 원금 a를 적립할 때 n년 후의 원리합계 ⇒ $S_n=a(1+r)^n$

ii) 연이율 r, 1년마다의 복리로

㉠ 연초에 a원씩 불입하는 적금의 n년말 후의 적립총액

$$\Rightarrow S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$

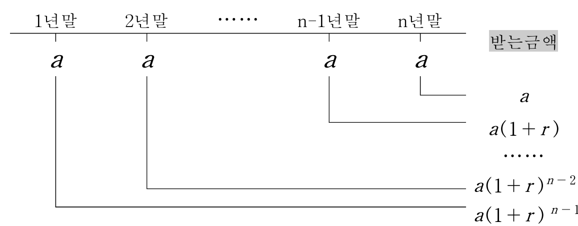
$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$



㉡ 연말에 a원씩 불입하는 적금의 n년말 후의 적립총액

$$\Rightarrow S_n=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$$



☺ 연금(年金)의 현가(現價)

i) 연이율 r일 때, n년 후에 받게될 연금 a의 현가

$1\Rightarrow P=\frac{a}{(1+r)^n}$ ($\because a=P(1+r)^n$)

ii) 연이율 r, 1년마다의 복리로 계산하는 연금에서

㉠금년부터 매년초에 a원씩 n년간 받는 연금의 금년초 현가

$$\Rightarrow P_n=a+\frac{a}{(1+r)}+\frac{a}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{a}{(1+r)^{n-1}}$$

$$=\frac{a(1+r)\{1-(1+r)^{-n}\}}{r}$$

㉡ 금년부터 매년말에 a원씩 n년간 받는 연금의 금년초 현가

$$\Rightarrow P_n=\frac{a}{(1+r)}+\frac{a}{(1+r)^2}+\frac{a}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{a}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{a\{1-(1+r)^{-n}\}}{r}$$

9. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $P(n)$가 다음 두 조건

⑴ $n=1$일 때, $P(n)$가 성립한다.

⑵ $n=k$ $(k\ge 1)$일 때, $P(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 $P(n)$이 성립한다.

을 만족하면, 명제 $P(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 성립

10. 순서도

1. 알고리즘(Algorithm): 구하고자 하는 해답을 얻는 과정을 단계적으로 나타낸 절차

2. 순서도(Flow chart):알고리즘의 처리 과정 전체를 명확히 알아볼 수 있도록 기호를 써서 나타낸 그림

11. 여러 가지 수열의 합

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, a_n: 일반항)

⑴ 멱급수: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{a+(n-1)d\}r^{n-1}$ (단, $r\ne 1$)

⇒ $S_n-r\,S_n$을 이용한다.

⑵ 분수수열의 합

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{(k+a)(k+b)}$ (c : 상수)

⇒ 이항분리 $\frac{c}{(k+a)(k+b)}=\frac{c}{b-a}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+b}\right)$

하여 합의 꼴로 전개해서 소거한다.

▶**부분분수**(部分分數 partial fraction)

i) $\frac{1}{a\cdot b}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

ii) $\frac{1}{a\cdot(a+b)}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)$

iii) $\frac{1}{a\cdot b\cdot c}=\frac{1}{c-a}\left(\frac{1}{a\cdot b}-\frac{1}{b\cdot c}\right)$

⑶무리수열 합 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{\sqrt{k-a}+\sqrt{k-b}}$ (c : 상수)

⇒ 유리화 $\frac{c}{\sqrt{k+a}+\sqrt{k+b}}=\frac{c}{a-b}(\sqrt{k+a}-\sqrt{k+b})$

하여 합의 꼴로 전개해서 소거한다.

12. 수열의 귀납적 정의-점화식(1)

① $a_{n+1}=a_n+d$ (d: 일정) ☜ 등차수열

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$, $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

② $a_{n+1}=r\,a_n$ (r: 일정) ☜ 등비수열

$(a_{n+1})^2=a_n\,a_{n+2}$, $a_{n+2}\div a_{n+1}=a_{n+1}\div a_n$

③ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+d$ (d: 일정) ☜ 조화수열

$2a_na_{n+2}=a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}$

$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$, $\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$

13. 수열의 귀납적 정의-점화식(2)

1. $a_{n+1}=a_n+f(n)$: 축차대입법 이용

⇒ $b_n=a_{n+1}-a_n$라 하면, $\{b_n\}=\{f(n)\}$: 계차수열

∴ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

2. $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$: 축차대입법 이용

⇒ $a_n=a_1\cdot\prod_{k=1}^{n-1}f(k)$

$=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(n-1)$

3. $a_{n+1}=pa_n+q$

⇒ ① $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 변형 (단, $\alpha=p\alpha+q$)

② $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$로 변형⇒ 계차수열

4. $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ (단, $p+q+r=0$)

⇒ $a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$로 변형⇒계차수열이용

5. $a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$ $(p,q,r\ne 0)$ ⇒ 역수를 취한다.

6. $a_{n+1}=q\,a_n^{\,p}$ ⇒ 양변에 로그를 취한다.

X	1. 무한수열의 극한	**수열의 극한**

1. 무한수열의 수렴과 극한값

$\lim_{n\to\infty}a_n=A$ ⋯ ① (단, A : 일정한 상수)일 때,

수열 $\{a_n\}$은 A에 수렴한다고 하고

이때, A를 수열 $\{a_n\}$의 극한값이라 한다.

2. 무한수열의 발산

$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ ⋯ ②

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ ⋯ ③

$\lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$ ⋯ ④

$\lim_{n\to\infty}a_n=\pm A$ ⋯ ⑤

일 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

2. 수열의 극한에 관한 성질

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ (A, B : 일정)일 때,

⑴ $\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n=cA$

⑵ $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=A\pm B$

⑶ $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=A\,B$

⑷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}$ (단, $B\ne 0$)

☞ ① $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0$ ② $\lim_{n\to\infty}c=c$ (단, c: 상수)

2. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여,

⑴ $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ (A, B : 일정)일 때,

$a_n<b_n$이면 , $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$ 즉 $A\le B$

⑵ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$ (A : 일정한 상수)일 때,

$a_n<b_n<c_n$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=A$

3. 무한등비수열의 극한

무한등비수열 $\{r^n\}$의 수렴·발산



⑴ $r>1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

⑵ $r=1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ 수렴

⑶ $-1<r<1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ 수렴

⑷ $r=-1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} r^n=\pm1$

⑸ $r<-1$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} r^n=\pm\infty$

☞ 무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건

⇒ $-1<r\le1$

☞ 무한등비수열 $\{ar^n\}$이 수렴할 조건

⇒ $a=0$ or $-1<r\le1$

4. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 극한

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 ⇔ $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$

※ $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

⑴ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

⑵ $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

☞ 무한수열의 극한 ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_n$

☞ 무한급수의 극한 ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n$

5. 무한등비급수의 극한

무한등비급수 $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ (단, $a\neq0$)의 극한



$-1<r<1$ 일 때, $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a}{1-r}$

☞무한등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건: $-1<r\le1$

☞무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$가 수렴할 조건

: $a=0$ 또는$\cdots -1<r<1$

∯ 수열의 극한에서의 참답형

1. $a_n<b_n$ 이고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ 이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ (참)
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n=1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$이다. (참)
3. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$ (참)
4. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ (참)
5. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$ (참)
6. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$ (참)
7. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴한다. (참)
8. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^3$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다. (참)
9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴할 때, $a_n<b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$ (거짓)
10. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ (거짓)
11. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (거짓)
12. $a_n<b_n<c_n$이고, $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$ 이면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. (거짓)
13. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$ (거짓)
14. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\neq0$ (거짓)

XI 1. 경우의 수 — 순열 조합 확률

사건 A, B가 일어날 경우의 수를 각각 $n(A), n(B)$
사건 A, B가 동시에 일어날 경우의 수를 $n(A\cap B)$
라 하면,

1. 합의 법칙
   두 사건 A 또는 B가 일어날 경우의 수는
   ⑴ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
   ⑵ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ($n(A\cap B)=0$일 때)
2. 곱의 법칙
   두 사건 A, B가 잇달아 일어날 경우의 수는
   $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

★ 배수 찾기

3의 배수	각 자리수의 합이 3의 배수
4의 배수	끝의 두 자리수가 00 또는 4의 배수
5의 배수	일의자리수가 0 또는 5
9의 배수	각 자리수의 합이 9의 배수

2. 순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서있게 늘여 놓는 것을 n개에서 r개 취한 순열이라 하고 기호 ${}_n\mathrm{P}_r$로 나타낸다. (단, $n\ge r$)

⑴ ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

⑵ ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$

※ $n!$ (계승, Factorial)의 정의

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

① $n!={}_n\mathrm{P}_n$ ② $0!=1$ ③ $1!=1$

3. 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하여 순서있게 늘여 놓는 것을 n개에서 r개 취한 중복순열이라 하고, 기호 ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.

${}_n\Pi_r=n^r$

4. 같은 것이 있는 경우의 순열

같은 것이 $p, q, r, \cdots$개씩 들어있는 n개를 순서 있게 늘여 놓는 경우의 수

$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$ (단, $p+q+r+\cdots=n$)

5. 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 것을 원순열이라 하고, 뒤집어 놓을수 있는 원순열을 염주순열.

⑴ 원순열 : $(n-1)! = \frac{{}_nP_n}{n}$

⑵ 염주순열 : $\frac{(n-1)!}{2}$

6. 조합

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 만든 집합을 n개에서 r개 취한 조합이라 하고 기호 ${}_nC_r$로 나타낸다. (단, $n \geq r$)

⑴ ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ ⑵ ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

7. 조로 나누는 경우의 수

1. 서로 다른 n개의 물건을 p, q, r개씩 3개 조로 나누는 경우의 수 ($p+q+r=n$)
   - ⑴ $p \neq q \neq r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r$
   - ⑵ $p = q \neq r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{2!}$
   - ⑶ $p = q = r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{3!}$
2. 서로 다른 n개의 물건을 p, q, r개씩 세 명에게 나 누어주는 경우의 수 ($p+q+r=n$)
   - ⑴ $p \neq q \neq r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times 3!$
   - ⑵ $p = q \neq r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{2!} \times 3!$
   - ⑶ $p = q = r$일 때 : ${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_rC_r \times \frac{1}{3!} \times 3!$

8. 함수의 개수

함수 $f: X \to Y$ (단, $n(X)=r$, $n(Y)=n$)에서

구 분	함수의 개수	조건
함 수	${}_n\Pi_r = n^r$	
전사함수 $f(X)=Y$	$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \cdot {}_nC_{n-i} \cdot {}_{n-i}\Pi_r$ ☞ y_k에게 x_l를 적어도 한 개이상 분배 방법	$n \leq r$
단사함수 (일대일함수) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	${}_nP_r$	$n \geq r$
전단사함수(일대일대응) $f(X)=Y$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$n!$	$n=r$
$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) \leq f(x_2)$인 함수	${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$	
$x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$인 함수	${}_nC_r$	$n \geq r$

9. 이항정리

n이 양의 정수일 때, $(a+b)^n$의 전개식

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

을 이항정리라 하고,

${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$, $\cdots$, ${}_nC_n$을 이항계수, ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ 또는 ${}_nC_r a^r b^{n-r}$를 일반항이라 한다.

10. 이항계수의 성질

n이 양의 정수일 때,

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_nC_n x^n$

⑴ ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

⑵ ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

⑶ ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1}$

⑷ ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots = 2^{n-1}$

⑸ ${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + 4{}_nC_4 + \cdots + n{}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$

⑹ ${}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{1}{3}{}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{n}{}_nC_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

11. 다항정리

$(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^p b^q c^r$항의 계수는

$\sum \frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$ (단, $p+q+r=n$)

12. 확률의 정의

개개의 근원사건이 일어나는 것이 같은 정도로 확실한 어떤 시행에서, 표본공간의 원의 개수를 $n(S)$ 라 하고, 사건 A의 원의 개수를 $n(A)$라 하면

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

를 사건 A가 일어날 확률이라 한다. 이와 같이 정의된 확률을 특히 수학적 확률이라 한다.

13. 확률의 덧셈정리

1. 두 사건 A, B에 대하여
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. 두 사건 A, B가 배반사건 즉, $A \cap B = \emptyset$일 때
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. 여 사건의 확률
   $P(A^c) = 1 - P(A)$ ☞ 적어도 하나로 표현

14. 조건부확률과 곱셈정리(1)

1. 조건부확률
   확률이 0이 아닌 두 사건 A, B에 대하여, A가 일어 났다는 조건하에서 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호 $P_A(B) = P(B|A)$로 나타낸다.
   $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
2. 확률의 곱셈정리(1)
   $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$
   (단, $P(A) > 0, P(B) > 0$)

15. 독립사건과 확률의 곱셈정리(2)

1. **종속사건**

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어날 경우와 일어나지 않을 경우에 따라 사건 B가 일어날 확률이 달라질 때, 사건 A와 B는 종속사건이라 한다.

$P(B|A) \neq P(B|A^c)$ ☜ $P(B|A) \neq P(B)$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

2. **독립사건**

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나든, 일어나지 않든, 사건 B가 일어날 확률이 달라지지 않을 때, 사건 A와 B는 독립사건이라 한다.

$P(B|A) = P(B|A^c)$ ☜ $P(B|A) = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

※ A와 B 독립 ⇔ A와 B^c 독립
⇔ A^c와 B 독립 ⇔ A^c와 B^c 독립

16. 독립시행의 정리

1. 독립시행의 정의 : 동일한 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 서로 독립일 경우, 이러한 시행을 독립시행이라 한다.
2. 독립시행의 확률 : 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p이고, 사건 A가 일어나지 않을 확률이 q (단, $p+q=1$)라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 시행에서 사건 A가 r회 발생할 확률 P_r을 독립시행의 확률이라 한다.

$P_r = {}_nC_r\, p^r q^{n-r}$

(단, $p+q=1, r=0,1,2,3,4,\cdots,n$)

XII 1. 이산확률분포 — 통 계

변수 x	x_1 x_2 x_3 …… x_i …… x_n	계
확률 p	p_1 p_2 p_3 …… p_i …… p_n	1

① $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ ② $m = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

③ $\sigma^2(X) = V(X) = E[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 p_i$
$= E(X^2) - m^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m^2$

④ $P(x_\alpha \leq X \leq x_\beta) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} p_i$

※ $Y = aX + b$

① $E(Y) = aE(X) + b$ ② $V(Y) = a^2 V(X)$
③ $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$
④ $E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c$

2. 연속확률분포

※ 확률밀도함수 성질 : $y = f(x)$ (단, $\alpha \leq x \leq \beta$)

① $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$: $y = f(x)$ 그래프와 x축 사이 넓이

② $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (단, $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)

4. 이항분포

1. 이항분포의 정의

⑴ 1회의 시행에서 사건 A가 발생할 확률이 p인 독립시행을 n회 시행하여 사건 A가 발생할 횟수를 x라 하면 확률변수 x에 대응하는 확률 $P(x)$는

$P(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$

(단, $p+q=1$, $x = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$)

⑵ 이 확률변수 x의 분포를 이항분포라 하고, 기호 $B(n, p)$로 나타낸다.

2. 이항분포 $B(n, p)$의 평균과 표준편차

⑴ $m = E(X) = np = \sum_{r=0}^{n} r \cdot {}_nC_r\, p^r q^{n-r}$

⑵ $\sigma^2(X) = V(X) = npq = \sum_{r=0}^{n} r^2 \cdot {}_nC_r\, p^r q^{n-r} - m^2$

5. 정규분포

1. 정규분포의 정의

확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty < x < \infty)$

(단, $e = 2.71828\cdots$, m : 평균, σ : 표준편차)

로 주어지는 확률변수 x의 분포를 정규분포라 하고, 기호 $N(m, \sigma^2)$로 나타낸다.

*정규분포 곡선의 성질

(1) 직선 $x = m$에 대하여 좌우대칭이고, $x = m$에서 최대값을 갖는다.

(2) σ가 커지면 최대값은 작아지고, σ가 작아지면 최대값은 커진다.

2. 이항분포와 정규분포(라플라스정리)

$B(n, p) \to N(np, npq) \to N(0, 1)$

[Ex] $\sum_{r=110}^{140} {}_{720}C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{720-r}$

$= P(110 \leq X \leq 140)$

$= P\left(\frac{110-120}{10} \leq Z \leq \frac{140-120}{10}\right)$

$= P(-1 \leq Z \leq 2)$로 해결.

(☀위 문제는 $B(720, \frac{1}{6})$에서 즉, $N(120, 10^2)$에서 $P(110 \leq X \leq 140)$을 구하라는 의미)

3. 표준정규분포

⑴ 정규분포 $N(m, \sigma^2)$에서 변수 X의 **표준측도** $Z = \frac{X-m}{\sigma}$는 정규분포 $N(0, 1)$를 이룬다.

⑵ 정규분포 $N(0, 1)$를 표준정규분포라 한다.

(3) $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$

4. 정규분포의 성질

$P(m-\sigma < X < m+\sigma) = P(|X-m| < \sigma) = 0.683$
$P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = P(|X-m| < 2\sigma) = 0.954$
$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = P(|X-m| < 3\sigma) = 0.997$

6. 표본평균의 분포

1. 표본평균의 평균과 분산

모평균이 m, 모 표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

(1) $E(\overline{X})=m$

(2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2. 모집단과 표본평균의 분포 관계

$X \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X} \sim N(m, (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$

* $P(a \le \overline{X} \le b)=P(\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le Z \le \frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

7. 모평균의 추정

1. 모평균의 추정 ⇒ 모평균의 신뢰구간

⑴신뢰도 95%

$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

⑵ 신뢰도 99%

$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2. 신뢰도 α% 신뢰구간의 길이

$l=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ($\alpha=95 \Rightarrow k=1.96$, $\alpha=99 \Rightarrow k=2.58$)

수학Ⅱ	1. 분수방정식의 해법	1.방정식부등식

i) 분수방정식(①)의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 정방정식(②)으로 고친다.
ii) 방정식(②)의 근(③)을 구한다.
iii) 근(③)중에서 분모가 0이 되는 근(무연근)은 버린다.

2. 무리방정식의 해법

i) 무리방정식(①)의 양변을 제곱하여 정방정식(②)으로 고친다.
ii) 방정식(②)의 근(③)을 구한다.
iii) 근(③)중에서 무리방정식(①)을 만족하지 않는 근(무연근)은 버린다.

3. 고차부등식의 해법

i) 주어진 부등식의 최고차항의 계수가 양수가 되도록 하여 $f(x)>0$ 또는 $f(x)<0$꼴로 고친다.
ii) 계수가 실수인 범위에서 $f(x)$를 인수분해하여 방정식 $f(x)=0$의 실근(①)을 구한다.
iii) 실근(①- x절편)을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프(②)를 그린다.
iv) $f(x)>0$이면 그래프(②)가 x축 위쪽에 있는 x값의 범위가, $f(x)<0$이면 그래프(②)가 x축 아래쪽에 있는 x값의 범위가 부등식의 해가 된다.

4. 분수부등식의 해법

i) 분수부등식(①)의 양변에 분모의 제곱을 곱하여 다항식만으로 된 부등식(②)을 만든다.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \cdots$ ① $\Rightarrow$ $f(x)g(x)>0 \cdots$ ②

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \cdots$ ① $\Rightarrow$ $f(x)g(x)\leq 0,\ g(x)\neq 0 \cdots$ ②

ii) 부등식(②)의 해(③)를 구한다.
iii) 해(③)중에서 분수부등식(①)의 분모가 0이 되는 값은 제외시킨다.

	1. 함수의 극한	2.함수의 극한

1. 함수의 좌극한
$\lim_{x\to a-0} f(x)$ ⋯①

2. 함수의 우극한
$\lim_{x\to a+0} f(x)$ ⋯②

3. 함수의 극한
$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=A$ ⋯③

(1) $\lim_{x\to a+0} f(x)=b$, $\lim_{x\to a-0} f(x)=c$

(2) $f(x)=b$, $\lim_{x\to a} f(x)=b$

(3) $f(x)=?$, $\lim_{x\to a} f(x)=b$

(4) $f(x)=b$, $\lim_{x\to a} f(x)=c$

(5) $f(x)=b$, $\lim_{x\to a} f(x)=?$

(6) $f(x)=?$, $\lim_{x\to a} f(x)=?$

2. 함수의 극한에 관한 성질

1. $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$ (A, B:일정),
(1) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cA$
(2) $\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$ 복호동순
(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=AB$
(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (단, $B\neq 0$)

2. 세 함수 $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$에 대하여,
(1) $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$ (A, B : 일정)일 때,
$f(x)\leq g(x)$이면 $\lim_{x\to a} f(x)\leq\lim_{x\to a} g(x)$
(2) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=A$ (A : 일정)일 때,
$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=A$

3. 함수의 연속성

함수 $y=f(x)$가 다음 세 조건
i) $x=a$에서 함수가 정의되고, 즉 $f(a)$가 존재하고
ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$이 존재하며,
iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.
을 동시에 만족할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속

4. 연속함수의 성질

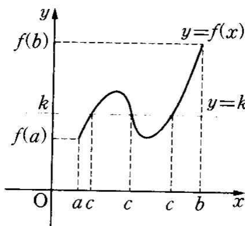
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,
다음 함수는 모두 $x=a$에서 연속이다.
(1) $f(x)\pm g(x)$
(2) $f(x)g(x)$
(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$
(4) $cf(x)$ (c: 상수)

5. 함수의 최대·최소의 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 최대값과 최소값을 갖는다.

6. 함수의 중간값의 정리

함수 $f(x)$가
① $[a, b]$에서 연속이고,
② $f(a) \neq f(b)$일 때,
$f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k값에 대하여,
$f(c) = k$를 만족하는 c가
개구간 (a, b)안에 적어도 하나 존재한다.



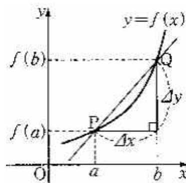
3.미분법

1. 평균변화율

x가 a에서 b까지 변할 때의
함수 $y = f(x)$의 평균변화율

(1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$



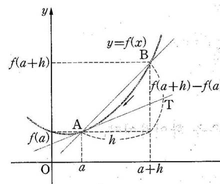
☞ 평균변화율의 기하학적 의의
두점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$을 지나는 직선의 기울기

2. 미분계수

$x = a$에서의
함수 $y = f(x)$의 미분계수

(1) $f'(a) = \lim_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(2) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$



☞ 미분계수의 기하학적 의의
점 $(a, f(a))$에서 $y = f(x)$에 접하는 접선의 기울기

3. 미분가능과 연속

1. 미분계수 $f'(x_1)$가 존재할 때,
「함수 $y = f(x)$는 $x = x_1$에서 미분가능」이라고 한다.
2. 함수 $y = f(x)$가 $x = x_1$에서 미분가능하면
$y = f(x)$는 $x = x_1$에서 연속이다.

☞「$y = f(x)$가 $x = x_1$에서 연속이면 함수 $y = f(x)$는 $x = x_1$에서 미분가능하다」는 성립하지 않는다.

☞「함수 $y = f(x)$가 $x = x_1$에서 미분가능하다」

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) & \cdots ① \\ \lim_{x \to x_1} f'(x) = f'(x_1) & \cdots ② \end{cases}$

4. 도함수

미분가능한 함수 $y = f(x)$의 도함수

(1) $f'(x) = \lim_{x_2 \to x} \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ ……. ③

(2) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ …. ③′

☞ 도함수의 기하학적 의의
점 $(x, f(x))$에서 $y = f(x)$에 접하는 접선군의 기울기

☞ $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(x)$

5. 미분공식

1. $y = c \Rightarrow y' = 0$, 즉 $(c)' = 0$
2. $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$, 즉 $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(cf(x))' = cf'(x)$
4. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
5. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
6. $(\{f(x)\}^n)' = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$

6. 나머지정리와 인수정리

1. $f(x)$를 $(x-α)^2$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면
$f(x) = (x-α)^2 Q(x) + R(x) \cdots (1)$
$f'(x) = 2(x-α)Q(x) + (x-α)^2 Q'(x) + R'(x) \cdots (2)$
∴ ⅰ) $f(α) = R(α)$ …①
ⅱ) $f'(α) = R'(α)$ …②

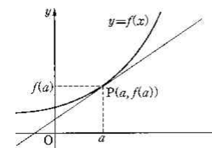
2. $f(x)$를 $(x-α)^2$로 나누어 떨어질 때,
$f(x) = (x-α)^2 Q(x) \cdots (1)$
$f'(x) = 2(x-α)Q(x) + (x-α)^2 Q'(x) \cdots (2)$
∴ ⅰ) $f(α) = 0$ …①
ⅱ) $f'(α) = 0$ …②

7. 접선과 법선의 방정식

곡선 $y = f(x)$상의 점 $(a, f(a))$에서의

(1) 접선의 방정식
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

(2) 법선의 방정식
$y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$



8. 함수의 증가·감소상태

함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때,
(1) $f'(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 증가상태
(2) $f'(a) < 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 감소상태
에 있다.

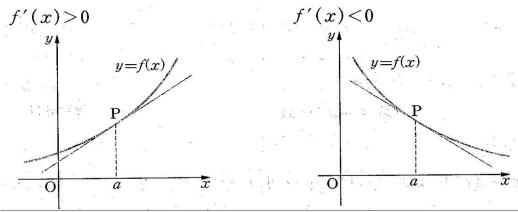
9. 함수의 증가와 감소

미분가능한 함수 $y=f(x)$는

⑴ $f'(x)>0$인 구간에서 증가하고

⑵ $f'(x)<0$인 구간에서 감소한다.

$f'(x)>0$ $f'(x)<0$



☞ 함수 $y=f(x)$가 항상 증가한다. ⇒ $\forall x$, $f'(x)\geq 0$

10. 함수의 증감표

미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(x)=0$의 근을 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 ,

x	$x<\alpha$	α	$\alpha<x<\beta$	β	$x>\beta$
$f'(x)$	+	0	−	0	⊕
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

⊕는 $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호가 양수임을 뜻함

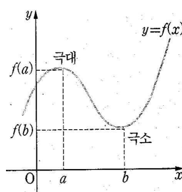
☞ 함수의 극대·극소, 증가·감소, 최대·최소, 그래프의 개형 등에 관한 문제는 증감표를 이용하라.

11. 함수의 극대·극소

1. 미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

⑴ 양에서 음으로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대다.
극대값 $f(a)$, 극대점 $(a, f(a))$

⑵ 음에서 양으로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소다.
극소값 $f(a)$, 극소점 $(a, f(a))$



2. 함수 $y=f(x)$가

⑴ $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$

⑵ $x=a$에서 극값 q를 가지면 $f'(a)=0$, $f(a)=q$

☞ $f'(a)=0$ $\not\Rightarrow$ $x=a$에서 극값을 갖는다.

3. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가

⑴ 극값을 가질 조건 : $D>0$

⑵ 극값을 갖지 않을 조건 : $D\leq 0$

(단, D는 방정식 $f'(x)=0$의 판별식이다.)

12. 삼차방정식의 실근의 수

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 서로 다른 실근의 수가

⑴ 3개일 조건 : $Mm<0$

⑵ 2개(중근)일 조건 : $Mm=0$

⑶ 1개(삼중근 또는 허근)일 조건 : $Mm>0$ or $D\leq 0$

단, M, m은 각각 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 극대값과 극소값이고, D는 $f'(x)=0$의 판별식

13. 삼차함수의 그래프-요철곡선

1. $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

⑴ $D>0$이면 극점이 2개이고,

⑵ $D\leq 0$이면 극점이 없다.

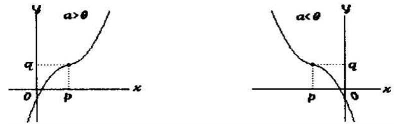
(단, D는 $y'=3ax^2+2bx+c=0$의 판별식)

2. $y=a(x-p)^3+q\ (a\neq 0)$

⑴ $a>0$이면 증가함수
⇒ ① $x<p$에서 위로 볼록
② $x>p$에서 아래로 볼록

⑵ $a<0$이면 감소함수
⇒ ① $x<p$에서 아래로 볼록
② $x>p$에서 위로 볼록

⑶ 변곡점 : (p, q)



14. 도함수의 부등식에의 응용

1. 함수 $y=f(x)$의 최대값이 M, 최소값이 m일 때,

⑴ $m>0$ ⇒ $f(x)>0$

⑵ $M<0$ ⇒ $f(x)<0$

2. $x>a$에서

⑴ $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$ ⇒ $f(x)>0$

⑵ $f'(x)<0$, $f(a)\leq 0$ ⇒ $f(x)<0$

15. 속도와 가속도

직선운동을 하는 점 $P(x)$의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 주어질 때,

⑴ 평균속도
t가 t_1에서 t_2까지 변할 때의 점 P의 평균속도

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

⑵ (순간)속도 : 시각 t에서의 점 P의 속도

$$v=f'(t)=\frac{dx}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

⑶ 가속도 : 시각 t에서의 점 P의 가속도

$$\alpha=f''(t)=\frac{dv}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

4.적분법

1. 부정적분

$F'(x)=f(x)$ $\underset{\text{미분}}{\overset{\text{적분}}{\rightleftarrows}}$ $\int f'(x)dx=F(x)+C$

$F(x)$: $f(x)$의 부정적분, 원시함수,

$f(x)$: 피적분함수

C : 적분상수

☞ ⑴ $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

⑵ $\int \frac{d}{dx}f(x)dt=f(x)+C$ (단, C : 상수)

2. 적분공식

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, C : 상수)
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
3. $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. 구분구적법

곡선 $y=f(x)$ ($f(x_k)>0$)와 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 면적 S는

$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ (단, $x_k = a + k\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$)

4. 무한급수의 정적분 화

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$

▶ $x_k = p\frac{k}{n} + q$ 를 $\to x$로

$\Delta x = x_2 - x_1 = (\frac{2p}{n}+q) - (\frac{p}{n}+q) = \frac{p}{n} \to dx$ 로

$\lim_{n\to\infty} x_1 = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ 로 고친다.

5. 무한급수와 정적분

연속함수 $f(x)$에 대하여

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p+\frac{q}{n}k)\frac{q}{n} = \int_p^{p+q} f(x)dx$
2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p+\frac{q}{n}k)\frac{q}{n} = \int_0^{q} f(p+x)dx$
3. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(p+\frac{q}{n}k)\frac{q}{n} = q\int_0^{1} f(p+qx)dx$

6. 정적분의 기본정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, $\int f'(x)dx = F(x) + C$ (단, C : 상수)일 때,

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

☞ ⑴ $\int_a^a f(x)dx = 0$

⑵ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

⑶ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$
$= \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$
$= \int_0^a \{f(-x) + f(x)\}dx$

⑶ $f(x)$가 우함수 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

⑷ $f(x)$가 기함수 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

⑸ $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

☞ 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때,
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

7. 정적분의 성질

$f(x)$, $g(x)$가 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ ☞ $\int f(x)dx \neq \int f(t)dt$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k : 상수)
3. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

8. 정적분과 도형의 넓이

1. 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적 $\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)|dx$

⑴ $f(x)\geq 0$일때, $S = \int_a^b f(x)dx$

⑵ $f(x)\leq 0$일때, $S = -\int_a^b f(x)dx$

☞ 곡선 $y=f(x)$을 그려서 x축 윗부분을 바로 적분하고, x축 아래부분을 부호를 바꿔서 적분한다.

2. 구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 둘러싸인 도형의 면적

$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

⑴ $f(x)-g(x)\geq 0$일때, $S = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

⑵ $f(x)-g(x)\leq 0$일때, $S = -\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

☞ 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$을 그려서, 위쪽에 있는 곡선에서 아래쪽에 있는 곡선의 식을 뺀 식을 적분한다.

9. 정적분과 입체의 체적

1. 구간 $[a, b]$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 입체의 단면적을 $S(x)$인 입체의 체적

$\Rightarrow V = \int_a^b S(x)dx$ ⋯ ①

2. 구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$을 x축 둘레에 회전시킨 회전체의 체적

$\Rightarrow V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ ⋯ ②

3. 구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$으로 둘러싸인 도형을 x축 둘레에 회전시킨 회전체의 체적

$\Rightarrow V = \pi\int_a^b \{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2\}dx$ ⋯ ③

(단, $f(x)\geq g(x)\geq 0$ 또는 $f(x)\leq g(x)\leq 0$)

☞ 그래프 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 그려서 회전체를 만들어 생각한다.

10. 위치의 변화와 이동거리

점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$,
시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 x_0일 때,

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)\,dt$$

(2) $t=a$에서 $t=b$까지의

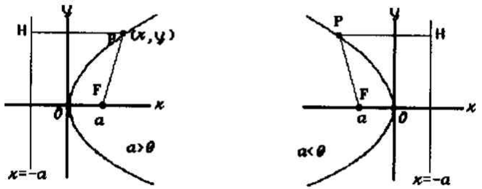
점 P의 위치 변화 = $\int_a^b v(t)\,dt$

점 P의 경과거리 = $\int_a^b |v(t)|\,dt$

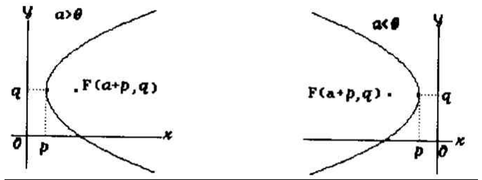
5.이차곡선

1. 포물선의 방정식(1)

1. 정점 $F(a,\ 0)$과 정직선 $x=-a$에서의 거리가 같은 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식
   $\Rightarrow$ $y^2=4ax$ ($a\neq0$)
   $\Rightarrow$ 초점 $F(a,\ 0)$, 준선 $x=-a$인 포물선
   꼭지점 $C(0,\ 0)$, 대칭축 $y=0$



2. 포물선 $(y-q)^2=4a(x-p)$ ($a\neq0$)
   ① 초점 $F(a+p,\ q)$ ② 준선 $x=-a+p$
   ③ 꼭지점 $C(p,\ q)$ ④ 대칭축 $y=q$



☞ $|a|$: 꼭지점에서 초점까지의 거리

2. 포물선의 방정식(2)

3. 정점 $F(0,\ b)$과 정직선 $y=-b$에서의 거리가 같은 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식
   $\Rightarrow$ $x^2=4by$ ($b\neq0$)
   $\Rightarrow$ 초점 $F(0,\ b)$, 준선 $y=-b$인 포물선
   꼭지점 $C(0,\ 0)$, 대칭축 $x=0$
4. 포물선 $(x-p)^2=4b(y-q)$ ($b\neq0$)
   ① 초점 $F(p,\ b+q)$ ② 준선 $y=-a+q$
   ③ 꼭지점 $C(p,\ q)$ ④ 대칭축 $x=p$

☞ $|b|$: 꼭지점에서 초점까지의 거리

3. 포물선과 직선의 위치 관계

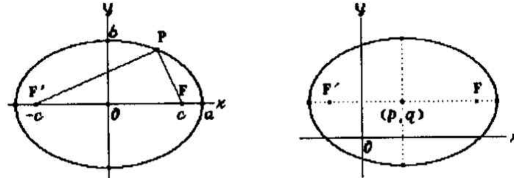
※ 포물선 $y^2=4ax$ $(a\neq0)$ ⋯ ①과
직선 $y=mx+n$ $(m\neq0)$ ⋯ ②은
ⅰ) $D>0$ ⇒ 서로 다른 두 점에서 만난다.
ⅱ) $D=0$ ⇒ 접한다.
ⅲ) $D<0$ ⇒ 만나지 않는다.
(단, D는 방정식 $(mx+n)^2=4ax$의 근의 판별식)

4. 포물선의 접선의 방정식

1. 포물선 $y^2=4ax$ $(a\neq0)$에 접하고 기울기가 m인
   접선의 방정식 ⇒ $y=mx+\dfrac{a}{m}$ $(m\neq0)$
2. 포물선 $x^2=4by$ $(b\neq0)$에 접하고 기울기가 m인
   접선의 방정식 ⇒ $y=mx-m^2b$ $(m\neq0)$
2. 포물선 $y^2=4ax$ $(a\neq0)$위의 점 $P(x_1,y_1)$에서 접하는
   접선의 방정식 ⇒ $y_1y=4a\cdot\dfrac{x+x_1}{2}$

5. 타원의 방정식

1. 두 정점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식 ($a>c>0$)
   ⇒ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a^2=b^2+c^2$)
   ① 초점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$
   ② 장축의 길이 $2a$ ③ 단축의 길이 $2b$



2. 두 정점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$으로부터 거리의 합이 $2b$인 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식 ($b>c>0$)
   ⇒ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b^2=a^2+c^2$)
   ① $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$
   ② 단축의 길이 $2a$ ③ 장축의 길이 $2b$

☞ c: 중심에서 초점까지의 거리

6. 타원과 직선의 위치관계

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ⋯ ①과
직선 $y=mx+n$ $(m\neq0)$ ⋯ ②은
ⅰ) $D>0$ ⇒ 서로 다른 두 점에서 만난다.
ⅱ) $D=0$ ⇒ 접한다.
ⅲ) $D<0$ ⇒ 만나지 않는다.
(단, D는 이차방정식 $b^2x^2+a^2(mx+n)^2=a^2b^2$의 근의 판별식)

7. 타원의 접선의 방정식

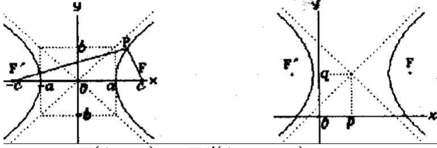
1. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인
   접선의 방정식 ⇒ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $(m\neq0)$
2. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1,y_1)$에서 접하는
   접선의 방정식 ⇒ $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

8. 쌍곡선의 방정식

1. 두 정점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$인 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식 ($c>a>0$)

 ⇒ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c^2=a^2+b^2$)

 ① 초점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$
 ② 주축의 길이 $2a$ ③ 부축의 길이 $2b$



2. 두 정점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$으로부터 거리의 합이 $2b$인 동점 $P(x,\ y)$의 자취의 방정식 ($c>b>0$)

 ⇒ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ (단, $c^2=a^2+b^2$)

 ① $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$
 ② 부축의 길이 $2a$ ③ 주축의 길이 $2b$

3. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ 의 점근선의 방정식

 ⇒ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$

☞ c: 중심에서 초점까지의 거리

9. 쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ … ①과

직선 $y=mx+n\ (m\neq 0)$ … ②은

i) $D>0$ ⇒ 서로 다른 두 점에서 만난다.

ii) $D=0$ ⇒ 접한다.

iii) $D<0$ ⇒ 만나지 않는다.

(단, D는 이차방정식 $b^2x^2-a^2(mx+n)^2=a^2b^2$의 근의 판별식)

10. 쌍곡선의 접선의 방정식

1. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 m인

 접선의 방정식 ⇒ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (m\neq 0)$

2. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서 접하는

 접선의 방정식 ⇒ $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

11. 이차곡선의 방정식

이차방정식 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$의 그래프는

1. $A=B$ ⇒ 원
2. $A\neq B,\ AB>0$ ⇒ 타원
3. $AB<0$ ⇒ 쌍곡선
4. $AB=0,\ A+B\neq 0$ ⇒ 포물선
5. $C^2-4A(By^2+Dy+E)=0$의 (판별식) $=0$ ⇒ 두 직선

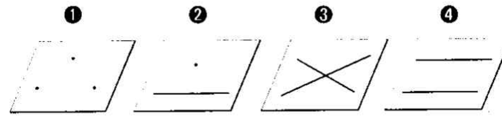
6.공간도형	1. 공간도형의 기본 성질	공간좌표

1. 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 한 개 존재한다.
2. 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면에 포함된다.
3. 한 직선 위에 있지 않는 서로 다른 세 점을 포함 하는 평면은 오직 한 개 존재한다.
4. 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면, 이 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

2. 평면의 결정 조건

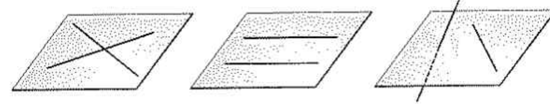
다음 각 경우에 평면이 올직 한 개로 결정된다.

(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점
(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한점
(3) 만나는 두 직선
(4) 평행한 두 직선



3. 두 직선의 위치 관계

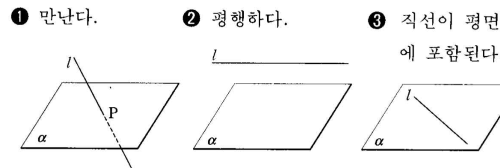
1. 만난다.
2. 평행하다.
 ─ 한 평면위에 있다.
3. 꼬인 위치에 있다. - 한 평면위에 있지 않다.



4. 평면과 직선의 위치 관계

1. 한 점에서 만난다.
2. 평행하다. - 만나지 않는다
3. 평면이 직선을 포함한다.

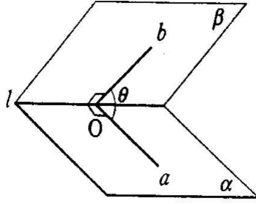
☞ 직선 l이 평면 α위의 평행하지 않은 두 직선 a, b와 수직이면 $l\perp\alpha$이다.



5. 이면각의 정의와 크기

1. 직선 l을 공유하는 두 평면 α, β이루는 각을 이면각이라 하고, 교선 l을 이면각의 변, 반 평면 α, β를 각각 이면각의 면이라 한다.

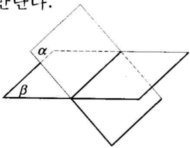
2. 두 평면 α, β의 교선 l위의 한점 O에서 두 평면 α, β에 내린 수선을 a, b라 하면 a, b가 이루는 각을 이면 각의 크기라고 한다.



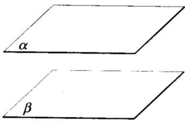
6. 두 평면의 위치 관계

1. 한 직선을 공유한다. - 만난다.
2. 평행하다. - 만나지 않는다.

❶ 만난다.



❷ 평행하다.



7. 삼수선의 정리

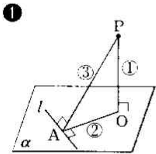
평면α위에 있지 않은 한 점 P, 평면α위의 두 점 O, A와 점 A를 지나는 평면α위의 직선 l에 대하여

❶ $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$, $\overleftrightarrow{OA}\perp l$ ⇒ $\overleftrightarrow{PA}\perp l$

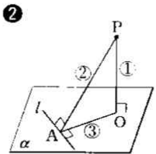
❷ $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$, $\overleftrightarrow{PA}\perp l$ ⇒ $\overleftrightarrow{OA}\perp l$

❸ $\overleftrightarrow{PA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{OA}$ ⇒ $\overleftrightarrow{OP}\perp\alpha$

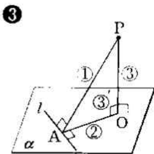
❶



❷



❸



8. 정사영의 길이와 면적

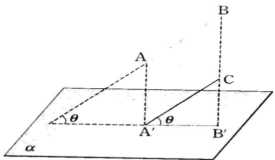
1. 평면α 밖의 한점 P에서 평면α에 내린 수선의 발을 P'이라 할 때, P'을 P의 평면α위로의 정사영이라 한다.

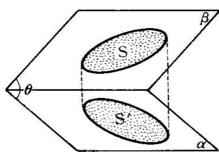
2. 선분 $\overline{AB}$의 평면α 위로의 정사영을 선분 $\overline{A'B'}$라 하고, 선분 $\overline{AB}$와 평면α가 이루는 각을 θ라 하면,

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$ … ①

3. 넓이가 S인 다각형의 평면α 위로의 정사영의 넓이가 S'이고, 이 다각형과 평면α가 이루는 예각을 θ라 할 때,

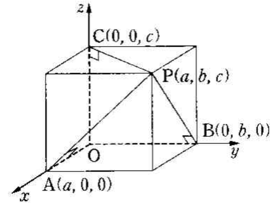
$S'=S\cos\theta$ … ②





9. 공간좌표

공간의 한점 O(원점)에서 서로 직각으로 만나는 세 수직선 Ox, Oy, Oz을 x축, y축, z축이라 한다. x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 한다. 좌표축이 정해진 공간을 좌표공간이라 하고, 좌표공간상의 한 점 P에서 각 좌표축에 내린 수선의 발의 좌표를 각각 a, b, c라 할 때, (a, b, c)를 점 P의 공간좌표라하고, $P(a, b, c)$로 나타낸다.



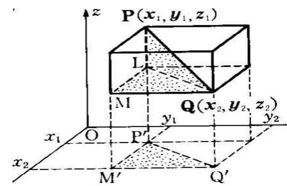
10. 두 점사이의 거리

1. 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$사이 거리

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

2. 원점 $O(0, 0, 0)$에서 점 $P(x_1, y_1, z_1)$사이거리

$\overline{OP}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}$



11. 선분의 내분점과 외분점

1. 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$을 잇는 선분을 $m:n$ ($m>0$, $n>0$)로 내분한 점의 좌표

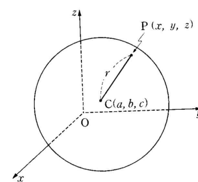
$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}, \dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$

2. 두 점 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$을 잇는 선분을 $m:n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분한 점의 좌표

$\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}, \dfrac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$

12. 구의 방정식

1. 정점 $C(a, b, c)$에서 일정(r)한 거리에 있는 동점 $P(x, y, z)$의 자취 ⇒ 중심 $C(a, b, c)$이고, 반지름 r인 구의 방정식



$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ……①

2. 중심 $O(0, 0, 0)$이고, 반지름 r인 구의 방정식

$x^2+y^2+z^2=r^2$ ……②

7. 벡터

1. 벡터의 정의(1)

1. 벡터의 정의와 표기법

점 A에서 점 B로 가는 방향이 주어진 유향선분 AB를 **벡터** AB라 하고, 기호 $\overrightarrow{AB}$로 나타낸다. 이 때, 점 A를 시점, 점 B를 종점이라 한다.

벡터는 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$와 같이 한 문자로 나타내기도 한다.

2. 벡터의 크기

선분 $\overline{AB}$의 길이를 $\overrightarrow{AB}$의 크기라 하며, 기호 $|\overrightarrow{AB}|$로 나타낸다. $|\vec{a}|$는 $\vec{a}$의 크기를 나타낸다.

2. 벡터의 정의(2)

3. 영벡터, 단위벡터, 역벡터

(1) 영벡터 : 크기가 0인 벡터를 영벡터라 하고, 기호 $\vec{0}$로 나타낸다. 방향은 임의로 생각한다.

(2) 단위벡터 : 크기가 1인 벡터를 단위벡터라 하고, 기호 $\vec{i}$ 또는 $\vec{e}$로 나타낸다.

(3) 역벡터 : 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터를 $\vec{a}$의 역벡터라 하고, 기호 $-\vec{a}$로 나타낸다.

☞ $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

5. 벡터의 상등

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 크기와 방향이 같을 때, "**벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 같다**"고 하고, 기호 $\vec{a}=\vec{b}$로 나타낸다.

3. 벡터의 상등

평행이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$일 때,

ⅰ) $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow m=n=0$

ⅱ) $m\vec{a}+n\vec{b}=p\vec{a}+q\vec{b} \Rightarrow m=p,\ n=q$

4. 벡터의 덧셈과 그 연산 법칙

1. 벡터의 덧셈과 뺄셈

평행사변형 $ABCD$일 때,

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ⋯ ①

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ⋯ ②

(3) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ ⋯ ③

2. 벡터의 덧셈의 연산 법칙

(1) 항등원 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(2) 역벡터 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

(3)교환법칙 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(4)결합법칙 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

5. 벡터의 스칼라배와 그 연산법칙

1. 벡터의 스칼라배 (단, k는 실수)

(1) $\vec{b}=k\vec{a}$

ⅰ) $k>0$: $\vec{b}$는 $\vec{a}$와 같은 방향, $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$

ⅱ) $k=0$: $\vec{b}=\vec{0}$

ⅲ) $k<0$: $\vec{b}$는 $\vec{a}$와 반대 방향, $|\vec{b}|=-k|\vec{a}|$

(2) $\vec{b}=k\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$ (단, $k\neq0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)

2. 벡터의 스칼라배의 연산법칙 (단, k, l은 실수)

(1) 결합법칙 $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(2) 분배법칙 ① $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

② $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

6. 위치벡터

※ 평면 또는 공간에서 한 점 O가 정해지면 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 점 A가 하나로 정해진다. 따라서 시점 O를 하나로 고정하면 점과 벡터는 일대일로 대응한다. 이 때, 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$를 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

7. 내분점 · 외분점의 위치벡터

평면 또는 공간에서 선분 $\overline{AB}$를 $m:n\,(m,\ n>0)$으로 내분한 점을 P, 외분한점을 Q, 선분 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\triangle ABC$의 무게중심을 G라 할 때,

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$, $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{g}=\overrightarrow{OG}$라 하면

(1) $\vec{p}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ (2) $\vec{q}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

(3) $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ (4) $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

8. 동일직선 · 동일평면상의 점

1. 세 점 A, B, C가 동일직선 상에 있을 조건

① $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$

② $\overrightarrow{OC}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$, $l+m=1$

③ $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, $p+q+r=0$

2. 네 점 A, B, C, D가 동일평면 상에 있을 조건

① $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

② $\overrightarrow{OD}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$, $l+m+n=1$

9. 평면벡터의 성분표시와 기본벡터

1. 벡터의 성분표시

점 $A\ (a_1,\ a_2)$라 하면 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$는

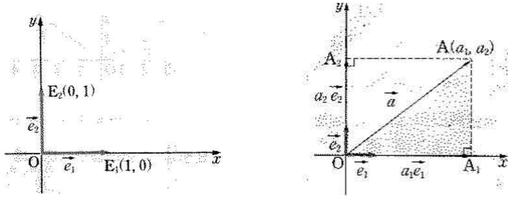
$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \cdots$ ①

$a_1,\ a_2$를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라 한다.

2. 기본벡터

위치벡터 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1) \cdots$ ②

를 평면에서의 기본벡터라 한다.



10. 평면벡터의 성분의 성질과 성분에 의한 연산

1. 평면벡터의 성분의 성질

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때,

(1) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

(2) $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ 단, $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)$

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

2. 평면벡터의 성분 의한 연산

(1) $(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) $(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) $k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k : 실수)

11. 평면벡터의 방향코사인

$\vec{0}$이 아닌 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ 가 x축, y축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면

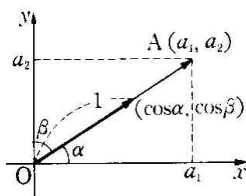
(1) 평면벡터의 방향코사인

$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$,

$a_2=|\vec{a}|\cos\beta$ $\cdots$ ①

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ $\cdots$ ②

$\cos\alpha$, $\cos\beta$를 벡터 $\vec{a}$의 방향코사인이라 한다.



(2) 평면벡터 $\vec{a}$와 같은 방향의 단위벡터

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \frac{a_2}{|\vec{a}|}\right) \cdots ③$$

12. 공간벡터의 성분표시와 기본벡터

1. 기본벡터

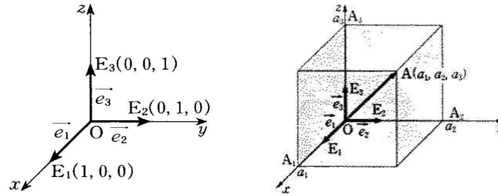
$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1) \cdots$ ①

2. 공간벡터의 성분표시

점 $A\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$의 위치벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$는

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3) \cdots$ ② ☜ 성분표시

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$ $\cdots$ ③☜ 기본벡터일차결합



13. 공간벡터 성분의 성질 및 성분에 의한 연산

1. 공간벡터의 성분의 성질

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때,

(1) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

2. 공간벡터의 성분 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때,

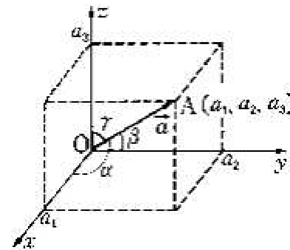
(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

(3) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ (단, k : 실수)

14. 공간벡터의 방향코사인

$\vec{0}$이 아닌 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$가 x축, y축, z축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β, γ라 하면



(1) 공간벡터의 방향코사인

$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$,

$a_2=|\vec{a}|\cos\beta$,

$a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$ $\cdots$ ①

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$를 벡터 $\vec{a}$의 방향코사인이라 한다.

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ $\cdots$ ②

(2) 공간벡터 $\vec{a}$와 같은 방향의 단위벡터

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \frac{a_2}{|\vec{a}|},\ \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right) \cdots ③$$

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdots ③'$$

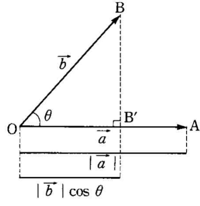
15. 벡터의 내적

$\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각을 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$라 할 때,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ … ①

를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 한다.

☞ $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



16. 벡터의 내적의 성질

1. 교환법칙 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. 결합법칙 ⑴ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$
   ⑵ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$
3. 분배법칙 ⑴ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{c}$
   ⑵ $(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ (단, k : 실수, 복호 동순)

※ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

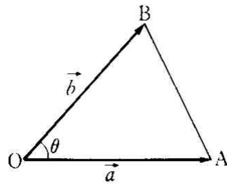
17. 벡터의 내적과 삼각형의 면적

$\triangle OAB$에서

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 할 때,

$\triangle OAB$의 면적 S는

$S=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$



18. 벡터의 내적의 성분에 의한 표시

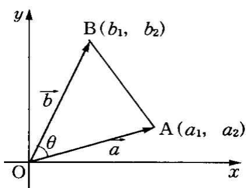
1. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때,
   $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
2. $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때,
   $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

19. 두 벡터가 이루는 각의 크기

$\vec{0}$이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 할 때,

⑴ $\vec{a}=(a_1, a_2)$,
$\vec{b}=(b_1, b_2)$ 이면,

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$



$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ … ①

⑵ $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때,

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

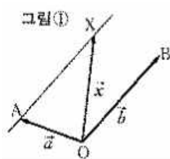
$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ … ②

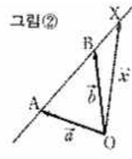
20. 두 벡터의 평행 · 수직 관계

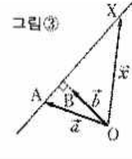
1. $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ (단, $k\neq0$인 실수)일 때,
   $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$
   $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
2. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때,
   $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$
   $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$
3. $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때,
   $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$
   $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

21. 직선의 벡터방정식과 방향벡터

1. 한점 $A(\vec{a})$를 지나고 $\vec{0}$가 아닌 벡터 $\vec{b}$에 평행한 직선의 벡터방정식은
   $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$ … ① ☞ $\vec{b}$: 직선의 방향벡터
2. 두 점 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$를 지나는 직선의 벡터방정식은
   $\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ 또는 $\vec{x}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ … ②
   $\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}$, $l+m=1$ … ②′
3. 한점 $A(\vec{a})$를 지나고 $\vec{0}$가 아닌 벡터 $\vec{b}$에 수직인 직선의 벡터방정식은
   $(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$ … ③







(단, P : 평면위의 임의의 점, $\vec{x}=\overrightarrow{OP}$

22. 직선의 방정식

1. 점 $A(x_1, y_1, z_1)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(l, m, n)$에 평행한 직선의 방정식은
   $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ … ①
   (단, 분모가 0이면 분자도 0으로 한다.)
   ☞ $\vec{u}=(l, m, n)$를 직선의 방향벡터라 한다.
2. 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$을 지나는 직선의 방정식은
   $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ … ②

23. 두 직선의 위치 관계

두 직선

g_1 : $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ … ③

g_2 : $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ … ③′

이 이루는 각을 θ라 할 때,

⑴ $g_1 // g_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

⑵ $g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

⑶ $\cos\theta=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\,2}+m_1^{\,2}+n_1^{\,2}}\sqrt{l_2^{\,2}+m_2^{\,2}+n_2^{\,2}}}$

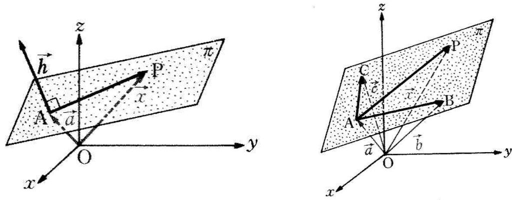
24. 평면의 벡터방정식과 법선벡터

1. 한 점 A를 지나고 $\vec{0}$이 아닌 벡터 $\vec{h}$에 수직인 평면 의 벡터방정식 (☞ $\vec{h}$: 평면의 법선벡터)

$(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{h}=0$ … ①

2. 동일 직선위에 있지 않는 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 벡터방정식(s, t : 실수)

$\vec{x}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$ … ②



(단, P : 평면위의 임의의 점, $\overrightarrow{OP}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$)

25. 평면의 방정식

1. 한점과 법선벡터가 주어진 직선의 방정식

한점 $A(x_1, y_1, z_1)$를 지나고 벡터 $\vec{v}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식은

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ … ①

☞ $\vec{v}=(a, b, c)$를 평면의 법선벡터라 한다.

2. 평면의 방정식의 일반형

x, y, z에 대한 일차방정식

$ax+by+cz+d=0$ … ②

은 벡터 (a, b, c)에 수직인 평면의 방정식이다.

3 평면의 방정식의 표준형

x, y, z에 대한 일차방정식

$ax+by+cz=p$ (단, $a^2+b^2+c^2=1$, $p>0$)

은 원점에서 거리가 p인 평면의 방정식이다.

4 평면의 방정식의 절편형

x절편 l, y절편 m, z절편 n인 평면의 방정식

$\dfrac{x}{l}+\dfrac{y}{m}+\dfrac{z}{n}=1$ (단, $lmn\neq0$)

26. 점과 평면사이의 거리

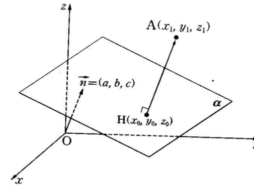
점 $A(x_1, y_1, z_1)$와

평면

$ax+by+cz+d=0$

사이의 거리

$l=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



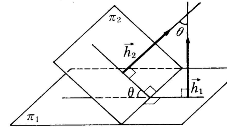
27. 두 평면의 위치 관계

두 평면

α_1: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

α_2: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

이 이루는 각을 θ라 하면



⑴ $\alpha_1 // \alpha_2 \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

⑵ $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

⑶ $\cos\theta=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}$

28. 직선과 평면의 교점, 평면과 평면의 교선

1. 직선과 평면의 교점의 좌표

직선 g : $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ … ①과

평면 α : $ax+by+cz+d=0$ ………… ②의

교점을 $T(x, y, z)$라 하면

g : $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}=t$ …①′에서

매개변수방정식 $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$…③을 구하여 ②에 대입하면 t값이 구해진다. 이를 ③에 대입하여 구한 x, y, z값이 교점의 각 좌표가 된다.

2. 두 평면의 교선

평면 α_1 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ … ①과

평면 α_2 : $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ … ②의

교선의 방정식 : $x=f(y)=g(z)$ ……③

단, ① ②에서 z를 소거한 식이 $x=f(y)$, y를 소거한 식이 $x=g(z)$이다.

29. 벡터와 도형의 영역(1)

동일 직선상에 있지 않은 세 점 O, A, B에 대하여

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (단, $\overrightarrow{OA}\neq0$, $\overrightarrow{OB}\neq0$) … ①

를 만족시키는 점 P의 존재범위

⑴ OA, OB를 이웃 두변으로 하는 평행사변형

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $0\leqq m\leqq1, 0\leqq n\leqq1$

⑵ 삼각형 OAB

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $m+n\leqq1$, $m\geqq0, n\geqq0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

$m+n=k$, $0\leqq k\leqq1$, $m\geqq0, n\geqq0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t(k\overrightarrow{OA})+(1-t)(k\overrightarrow{OB})$

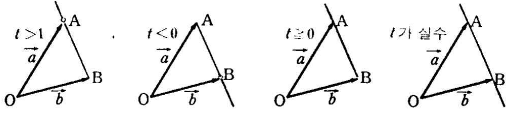
$0\leqq t\leqq1, 0\leqq k\leqq1$

30. 벡터와 도형의 영역(2)

동일 직선상에 있지 않은 세 점 O, A, B에 대하여
$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (단, $\overrightarrow{OA}\neq 0$, $\overrightarrow{OB}\neq 0$) ⋯ ①
를 만족시키는 점 P의 존재범위

⑶ 직선 $\overleftrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $m+n=1$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$
☞ $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $2m+3n=6$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t(3\overrightarrow{OA})+(1-t)(2\overrightarrow{OB})$

⑷ 선분 $\overline{AB}$
$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $m+n=1$, $m\geq 0$, $n\geq 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$, $0\leq t\leq 1$
☞ $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $2m+3n=6$, $m\geq 0$, $n\geq 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=t(3\overrightarrow{OA})+(1-t)(2\overrightarrow{OB})$, $0\leq t\leq 1$



미분과적분	1. 삼각함수의 합의 공식	1.삼각함수

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
6. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 삼각함수의 합성

1. $a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ ☜ $(a,\ b)$
단, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$
2. $a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos(\theta-\beta)$ ☜ $(b,\ a)$
단, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\beta=\dfrac{a}{r}$, $\cos\beta=\dfrac{b}{r}$

3. 삼각함수의 배각의공식

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
3. $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

4. 삼각함수의 삼배각의공식

1. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
2. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

5. 삼각함수의 반각의 공식

1. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
2. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
3. $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

※ $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

※ $\tan\dfrac{\alpha}{2}=t$ 일 때,

$\sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$

6. 곱을 합·차로고치는 공식

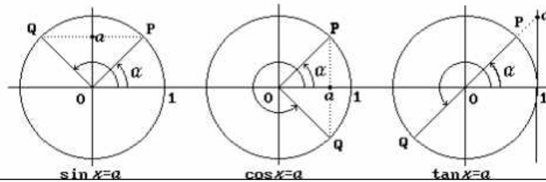
1. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$
2. $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$
3. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$
4. $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

7. 합·차를 곱으로 고치는 공식

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

8. 삼각방정식의 일반해(1)

특수해를 α, n을 임의의 정수라 할 때,
1
$\sin x=a$ (단, $|a|\leq 1$) ⇨ $x=n\pi+(-1)^n\alpha$
2. $\cos x=a$ (단, $|a|\leq 1$) ⇨ $x=2n\pi\pm\alpha$
3. $\tan x=a$ ⇨ $x=n\pi+\alpha$



9. 삼각방정식의 일반해(2)

각 α를 임의의 상수, n을 임의의 정수라 할 때,
1. $\sin x=\sin\alpha$ ⇨ $x=n\pi+(-1)^n\alpha$
2. $\cos x=\cos\alpha$ ⇨ $x=2n\pi\pm\alpha$
3. $\tan x=\tan\alpha$ ⇨ $x=n\pi+\alpha$

10. 삼각방정식의 해법

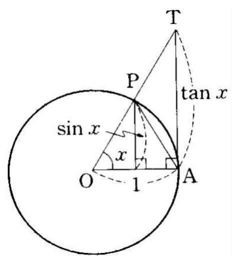
1. $\sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \Rightarrow \sin x = t$로
2. $\cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \Rightarrow \cos x = t$로
3. $\tan x,\ \tan^2 x,\ \sec^2 x,\ \sin 2x,\ \cos 2x \Rightarrow \tan x = t$로
4. $\sin x + \cos x,\ \sin x\cos x \Rightarrow \sin x + \cos x = t$로
5. $\sin x\cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$
   ⇒ ① 배각으로 ② $\tan x = t$로
6. $a\sin x + b\cos x$
   ⇒ ① 합성 ② $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 와 연립으로
7. $\sin n_1 x + \sin n_2 x + \cos m_1 x + \cos m_2 x$ ⇒ 곱으로
8. $\sin n_1 x + \sin n_2 x$ ⇒ ①일반해 ② 곱으로
   $\cos m_1 x + \cos m_2 x$ ⇒ ①일반해 ② 곱으로
9. $\sin n_1 x \cos m_1 x + \sin n_2 x + \cos m_2 x$ ⇒ 합으로

11. 삼각함수의 최대 최소값

1. $\sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \Rightarrow \sin x = t$로 치환
   $\cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \Rightarrow \cos x = t$로 치환
2. $\sin x + \cos x,\ \sin x\cos x \Rightarrow \sin x + \cos x = t$로 치환
3. $\sin x\cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$ ⇒ 배각으로
4. $a\sin x + b\cos x$ ⇒ 합성

. 함수의 극한

1. 삼각함수의 극한
   $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ \cdots$ ①
   (단, x는 라디안)



2. e의 정의
   $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
   $= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ \cdots$ ②
3. 자연로그의 정의
   $\log_e x = \ln x \ \cdots$ ③
4. 로그함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ \cdots$ ④
5. 지수함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \ \cdots$ ⑤

2.미분법 | 1. 함수의 몫과 합성함수의 미분법

1. 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$ 가 미분가능할 때,
   $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2}$, $g(x) \neq 0$
2. 두 함수 $y=f(u),\ u=g(x)$ 가 미분가능할 때,
   합성함수 $y=f\{g(x)\}$ 의 도함수는
   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 즉, $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

2. 음함수의 미분법

음함수 $f(x, y) = 0$의 각 항을 합성함수의 미분법을 이용하여 x에 대하여 미분한 다음, $\frac{dy}{dx}$ 에 대하여 푼다.

$ex)$ $x^2 + xy + y^2 + 3 = 0$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구해보자

(풀이) $\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^2 + \frac{d}{dx}3 = 0 \ \cdots$ ①

$\because\ \frac{d}{dx}xy = \left(\frac{d}{dx}x\right)y + x\left(\frac{d}{dx}y\right)$

$\left(\frac{d}{dx}y\right) = \left(\frac{d}{dy}y\right)\frac{dy}{dx}$, $\left(\frac{d}{dx}y^2\right) = \left(\frac{d}{dy}y^2\right)\frac{dy}{dx}$

$\therefore\ 2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \ \cdots$ ②

$(x+2y)\frac{dy}{dx} = -(2x+y)$ $\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$

3. 역함수와 매개변수함수의 미분법

1. 역함수의 미분법
   ⑴ $x = f(y)$에서 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
   ⑵ $g(x) = f^{-1}(x)$일 때, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$
2. 매개변수함수의 미분법
   $x = f(t),\ y = g(t)$가 미분가능이고 $f'(t) \neq 0$일 때
   $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \ \cdots$ ②

4. 삼각함수의 미분법

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\sec x)' = \sec x\tan x$
5. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x\cot x$
6. $(\cot x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$

5. 지수 · 로그함수의 미분법

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

7. 이계도함수

$y=f(x)$, $y=f'(x)$가 미분가능일 때,

$\{f'(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$ … ①

를 $y=f(x)$의 이계도함수라 하고, 기호

$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ … ②

로 나타낸다.

8. 롤의 정리

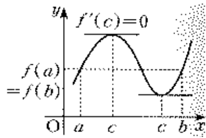
1. 롤의 정리

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능일 때,

$f(a)=f(b)$이면

$f'(c)=0$ $(a<c<b)$ … ①

되는 c가 적어도 하나 존재한다.



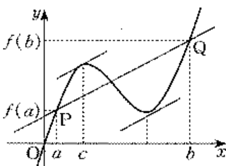
2. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능일 때,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $(a<c<b)$

… ②

이 되는 c가 적어도 하나 존재한다.



$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ $(0<\theta<1)$ … ③

9. 도함수가 0인 함수

폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능인 함수 $y=f(x)$가 개구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 함수 $f(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 상수함수다.

10. 극대 · 극소의 판정(2)

이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$가

$f'(a)=0$일 때,

(1) $f''(a)>0$이면 $x=a$에서 극소값 $f(a)$을 갖는다.

(2) $f''(a)<0$이면 $x=a$에서 극대값 $f(a)$을 갖는다.

11. 곡선의 요철과 변곡점

이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서

(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

(3) $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

12. 함수의 그래프

1. 곡선이 존재하는 범위를 구한다.
2. 곡선의 대칭성을 조사한다.
3. 좌표축과의 교점을 구한다,
4. 점근선이 있으면 조사한다.
5. 함수의 증가, 감소와 극대, 극소를 조사한다.
6. 곡선의 오목, 볼록과 변곡점 등을 조사한다.

☞ 증감표를 이용한다.

13. 함수의 최대값과 최소값

폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 최대값과 최소값은

i) 극대값 ii) 극소값 iii) $f(a)$ iv) $f(b)$

중에서 가장 큰값이 최대값, 가장 작은 값이 최소값이다. ☞ 폐구간 $[a, b]$에서 증감표를 이용한다.

14. 미분법의 「방정식」에의 응용

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 서로 다른 실근의 수가

(1) 3개일 조건 : $Mm<0$

(2) 2개(중근)일 조건 : $Mm=0$

(3) 1개(삼중근 또는 허근)일 조건 : $Mm>0$ or $D\leq 0$

단, M, m은 각각 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 극대값과 극소값이고, D는 $f'(x)=0$의 판별식이다.

15. 미분법의 「부등식」에의 응용

1. 함수 $y=f(x)$의 최대값이 M, 최소값이 m일 때,

(1) $m>0$ ⇒ $f(x)>0$

(2) $M<0$ ⇒ $f(x)<0$

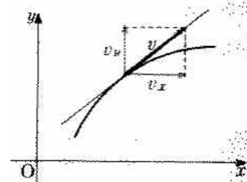
2. $x>a$에서

(1) $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$ ⇒ $f(x)>0$

(2) $f'(x)<0$, $f(a)\leq 0$ ⇒ $f(x)<0$

16. 속도와 가속도

좌표평면 운동을 하는 동점 $P(x, y)$의 시각 t에서의 위치벡터가 $\vec{p}=(x, y)$이고, $x=f(t)$, $y=g(t)$로 주어질 때, 점 $P(x, y)$의



(1) 속도 $\vec{v}=(v_x, v_y)=(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$

(2) 속력 $|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

(3) 가속도 $\vec{a}=(a_x, a_y)=(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2})$

3. 적분법

1. x^n의 적분법

n이 임의의 실수일 때

(1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$)

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

2. 삼각함수의 부정적분

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x dx = \sin x + C$
3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
4. $\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$
5. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
6. $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + C$

※ 곱은 합과 차로 고쳐서 적분

(1) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

(2) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}$

(3) $\sin mx \sin x = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}$

(4) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$

※ (1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (2) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(1) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ (2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

(3) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ (4) $\cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x - 1$

3. 지수함수와 로그함수의 부정적분

1. 지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx = e^x + C$

(2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

2. 로그함수의 부정적분

(1) $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ ☜ $\ln x = 1 \times \ln x$

※ (1) $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$

(2) $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$

4 치환적분법

1. $\int f(g(x)) g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$ (단, $g(x) = t$)
2. $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$
3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

※ (1) $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

5 부분적분법

$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx + C$

※ $f(x)$: $\ln x - x^n - \sin x, \cos x - e^x$: $g'(x)$

6 미분·적분의 기본성질

$f(x)$가 연속함수일 때

1. $\frac{d}{dx}\int_a^t f(t)\, dt = f(x)$
2. $\int f(x)\, dx = F(x) + C$이면

$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

7. 정적분과 극한

$f(x)$가 연속함수일 때, $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\, dt = f(a)$

8. 정적분의 치환적분법과 부분적분법

1. 치환적분법

$g(x) = t$이고 $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$일 때

$\int_a^b f(g(x)) g'(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(t)\, dt$

2. 부분적분법

$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$

9. 도형의 넓이

1. 곡선과 x축 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$S = \int_a^b |y| dx = \int_a^b |f(x)| dx$

2. 두 곡선 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$과 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이

$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

10. 입체와 회전체의 부피

1. 입체의 부피

폐구간 $[a, b]$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 체적 V는

$V = \int_a^b S(x)\, dx$

2. 회전체의 부피

(1) 곡선 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$를 x축 둘레로 회전하여 생긴 회전체의 체적 V_x는

$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

(2) 곡선 $x = g(y)$ $(c \leq y \leq d)$를 y축 둘레로 회전하여 생긴 회전체의 체적 V_y는

$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy$

11. 위치의 변화와 경과거리

점 $P(x)$의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, 시각 $t=0$에서의 위치가 x_0일 때,

⑴ 시각 t에서의 점 P의 위치

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(t)\,dt$$

⑵ $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P의 위치 변화

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

⑶ $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P의 경과거리

$$\int_a^b |v(t)|\,dt$$

12. 점의 경과 거리와 곡선의 길이

1. 평면운동을 하는 점의 경과 거리

시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$인 동점 $P(x, y)$의 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 경과 거리를 l이라 하면

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \cdots\cdots①$$

$$=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt \quad \cdots②$$

2. 곡선의 길이

곡선 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \quad \cdots\cdots③$$